矩阵相似的定义和性质

1. 定义 设 A、B 都是 n 阶矩阵，若存在可逆阵 P，使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称 B 是 A 的**相似矩阵**，或说矩阵 A 与 B **相似**.

对 A 进行运算 $P^{-1}AP$ 称为对 A 进行相似变换，

可逆矩阵 P 称为把 A 变成 B 的相似变换矩阵.

2. 性质：

(1). 相似关系为等价关系

反身性：$EAE=A$

对称性：$P^{-1}AP=B \Rightarrow PBP^{-1}=A$

传递性：$P^{-1}AP=B,\ Q^{-1}BQ=C \Rightarrow \left(PQ\right)^{-1}A\left(PQ\right)=C$

(2). $B=P^{-1}AP \Rightarrow B^k=P^{-1}A^kP$; $\varphi(B)=P^{-1}\varphi(A)P$

$$B^k=P^{-1}AP\cdot P^{-1}AP\cdot\cdots\cdot P^{-1}AP=P^{-1}A^kP.$$

$$\varphi\left(B\right)=a_0E+a_1B+a_2B^2+\cdots+a_mB^m$$

$$=a_0E+a_1P^{-1}AP+a_2P^{-1}A^2P+\cdots+a_mP^{-1}A^mP$$

$$=P^{-1}\left(a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m\right)P$$

$$=P^{-1}\varphi\left(A\right)P$$

(3). A与B相似 $\Rightarrow R(A)=R(B)$且$|A|=|B|$

$$P^{-1}AP=B \Rightarrow A\sim B$$

$$\Rightarrow \left|P^{-1}AP\right|=|B| \Rightarrow \left|P^{-1}\right||A||P|=|B| \Rightarrow |A|=|B|$$

(4). A与B相似$\Rightarrow$ A与B的特征多项式相同

$\Rightarrow$ A与B的特征值相同

$$P^{-1}AP=B \qquad \left|B-\lambda E\right|=\left|P^{-1}AP-P^{-1}(\lambda E)P\right|$$

$$=\left|P^{-1}(A-\lambda E)P\right|$$

$$=\left|P^{-1}\right|\left|A-\lambda E\right|\left|P\right|$$

$$=\left|A-\lambda E\right|$$

思考：此条件是否充要？

推论　若n阶矩阵A与对角矩阵

$$\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

相似，则$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$就是$A$的$n$个特征值.

证　$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$即是$\Lambda$的$n$个特征值，$A$与$\Lambda$相似，从而有相同的特征值.

(4). A与B相似 $\Rightarrow$ A与B的特征多项式相同

$\Rightarrow$ A与B的特征值相同

思考：此条件是否充要？

A与B有相同的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,

A与B都能与对角阵相似，

$$\left.\begin{array}{l} A\sim diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n), \\ B\sim diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n), \end{array}\right. \Rightarrow A\text{与}B\text{相似}$$

1. 目的：找可逆阵P,使得$P^{-1}AP=\Lambda$为对角阵.

2. 问题： 能不能化 ? 不是所有方阵均可对角化.

例：$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$不能相似对角化

证明：A的两特征值为1,1, $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

$A=P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}=E$, 矛盾.

1. 问题1： 何时能化？（找充要条件）

2. 问题2. 怎么化？ （找P和Λ）

谢　谢