特征值与特征向量的性质

定理1 设λ是方阵A的特征值，则

(1) λ^2是A^2的特征值；

(2) 当A可逆时，λ^{-1}是A^{-1}的特征值.

证 因λ是A的特征值，有$p\neq 0$使$Ap=\lambda p$. 于是

(1) $A^2p=A(Ap)=A(\lambda p)=\lambda(Ap)=\lambda^2 p$，所以$\lambda^2$是$A^2$的特征值.

类似可证：若λ是A的特征值，则λ^k是A^k的特征值.

(2) 当A可逆时，由$Ap=\lambda p$，有$p=\lambda A^{-1}p$，$\Rightarrow A^{-1}p=\dfrac{1}{\lambda}p$，

设 $\varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$ 是矩阵A的多项式，

$\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$ 是λ的多项式.

定理2 设λ是方阵 A 的特征值，则 $\varphi(\lambda)$ 是 $\varphi(A)$ 的特征值.

证

$$
\begin{aligned}
\varphi(A)p &= \left(a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m\right)p \\
&= a_0p+a_1Ap+\cdots+a_mA^mp \\
&= a_0p+a_1\lambda p+\cdots+a_m\lambda^mp \\
&= \left(a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m\right)p \\
&= \varphi(\lambda)p
\end{aligned}
$$

例　设3阶矩阵 A 的特征值为1，-1，2，求 $A^*+3A-2E$ 的特征值.

解　$|A|=1\times(-1)\times 2=-2$, 所以$A$可逆，且 $A^*=|A|A^{-1}=-2A^{-1}$,

记 $\varphi(A)=A^*+3A-2E=-2A^{-1}+3A-2E$， $\varphi(\lambda)=-\dfrac{2}{\lambda}+3\lambda-2$,

从而 $\varphi(A)$ 的特征值为

$$\varphi(1)=-1,\ \varphi(-1)=-3,\ \varphi(2)=3.$$

定理3 设 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 是方阵A的特征值， $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 依次是与之对应的特征向量，如果$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 各不相同，则 $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 线性无关.

这个定理说明：

属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

推论：设 λ_1 和 λ_2 是方阵 A 的两不同特征值，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 分别是对应于 λ_1 和 λ_2 的线性无关的特征向量，则 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 线性无关.

这个推论表明:对应于两个不同特征值的线性无关的特征向量组，合起来仍是线性无关的.

这一结论对 $m(m \geq 2)$ 个特征值的情形也成立.

例：设 λ_1 和 λ_2 是方阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量依次为 p_1 和 p_2， 证明 p_1+p_2 不是 A 的特征向量.

证 按题设，$Ap_1=\lambda_1 p_1$，$Ap_2=\lambda_2 p_2$，

$$A\left(p_1+p_2\right)=\lambda_1 p_1+\lambda_2 p_2 .$$

假设 p_1+p_2 是 A 的特征向量，则应存在数 λ，使

$$A\left(p_1+p_2\right)=\lambda\left(p_1+p_2\right),$$

例：设 λ_1 和 λ_2 是方阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量依次为 p_1 和 p_2， 证明 p_1+p_2 不是 A 的特征向量.

证　于是　$\lambda(p_1+p_2)=\lambda_1 p_1+\lambda_2 p_2$,

即　$(\lambda_1-\lambda)p_1+(\lambda_2-\lambda)p_2=0$,

因 $\lambda_1\neq\lambda_2$, p_1, p_2 线性无关, 故由上式得 $\lambda_1-\lambda=\lambda_2-\lambda=0$,

即 $\lambda_1=\lambda_2$ ，与题设矛盾. 因此 p_1+p_2 不是 A 的特征向量.

谢　谢！