相似矩阵及二次型

方阵的特征值与特征向量

特征值与特征向量的定义

特征值与特征向量

1.定义：设A是n阶矩阵，如果数λ和n维非零向量x满足

$Ax=\lambda x$，则这样的数λ称为矩阵A的特征值，非零向量x称为A的对应于特征值λ的特征向量.

$Ax=\lambda x \Leftrightarrow (A-\lambda E)x=0$，有非零解$\Leftrightarrow |A-\lambda E|=0$,

即 $$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

以λ为未知数的一元n次方程 $|A-\lambda E|=0$ 称为A的特征方程.

$f(\lambda)=|A-\lambda E|$ 称为矩阵 A 的特征多项式.

矩阵A的特征值就是它的特征方程的根.

n阶矩阵A在复数范围内有n个特征值.

设n阶矩阵$A=(a_{ij})$的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,

$(1)\ \lambda_1+\cdots+\lambda_n=a_{11}+\cdots+a_{nn}$　　　$(2)\ \lambda_1\cdots\lambda_n=|A|$

设 $\lambda=\lambda_i$ **为矩阵A的一个特征值,**

由方程 $(A-\lambda_i E)x=0$ **可求得非零向量** $x=p_i$,

则p_i就是矩阵A的对应于特征值λ_i的特征向量.

特征值与特征向量的求法

二、 特征值与特征向量的求法

步骤：(1) 写出A的特征多项式$|A-\lambda E|$

(2). 解特征方程得n个特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$

(3). 对每个特征值λ_i，求 $(A-\lambda_i E)x=0$ 的基础解系，

写出其全体非零线性组合，即得λ_i的全体特征向量.

例 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解：A的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)(2-\lambda),$$

所以A的特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=4.$

对于$\lambda_1=2$，解方程 $(A-2E)x=0.$ 由

$$A-2E=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$ 得基础解系 $p_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$,

所以$kp_1(k\neq 0)$是对应于$\lambda_1=2$的全部特征向量.

对于 $\lambda_2=4$, 解方程 $(A-4E)x=0$. 由

$$A-4E=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$ 得基础解系 $p_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$,

所以$kp_2(k\neq 0)$是对应于$\lambda_2=4$的全部特征向量.

例　求矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解：A的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2$$

所以A的特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=\lambda_3=1.$

对于$\lambda_1=2$，解方程$(A-2E)x=0$. 由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-3&1&0\\-4&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\text{得基础解系 } p_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以$kp_1(k\neq0)$是对应于$\lambda_1=2$的全部特征向量.

对于$\lambda_2=\lambda_3=1$，解方程$(A-E)x=0$. 由

$$A-E=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-4&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},\text{得基础解系 } p_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},$$

所以$kp_2(k\neq0)$是对应于$\lambda_2=\lambda_3=1$的全部特征向量.

谢　谢