相似矩阵及二次型

向量组的正交化

正交矩阵与正交变换

向量组的正交化

若$e_1,e_2,\cdots,e_r$是向量空间V的一个规范正交基，

$$\forall \alpha \in V, \quad \alpha = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r,$$

$$e_i^T \alpha = \lambda_1 e_i^T e_1 + \cdots + \lambda_r e_i^T e_r = \lambda_i e_i^T e_i = \lambda_i,$$

即 $\lambda_i = e_i^T \alpha = \left[\alpha, e_i\right]$

这就是向量在规范正交基中的坐标计算公式，

利用这个公式能方便地求得向量的坐标.

施密特（Schmidt）正交化法

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是向量空间 V的一个基，要求向量空间 V 的一个规范正交基. 也就是要找一组两两正交的单位向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$，使$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 等价.

此问题称为把基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 规范正交化.

把基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 规范正交化：

1）正交化

令 $\beta_1=\alpha_1$， $\beta_2=\alpha_2-\frac{[\beta_1,\alpha_2]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1$， $\beta_3=\alpha_3-\frac{[\beta_1,\alpha_3]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\beta_2,\alpha_3]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2$，

… … …

$$\beta_r=\alpha_r-\frac{[\beta_1,\alpha_r]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1-\frac{[\beta_2,\alpha_r]}{[\beta_2,\beta_2]}\beta_2-\cdots-\frac{[\beta_{r-1},\alpha_r]}{[\beta_{r-1},\beta_{r-1}]}\beta_{r-1}$$

则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 两两正交，且与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 等价.

2）规范化

令 $\xi_1 = \dfrac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1,\ \xi_2 = \dfrac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2,\ \cdots,\ \xi_r = \dfrac{1}{\|\beta_r\|}\beta_r$，

就得到V的一个规范正交基.

注 上述方法中的两个向量组对任意的 $1 \le k \le r$,

$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$ 与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 都是等价的.

例：设 $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}, a_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$，试把这组向量规范正交化.

解　取 $b_1=a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$，

$$b_2=a_2-\frac{[b_1,a_2]}{[b_1,b_1]}b_1=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}-\frac{4}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$b_3=a_3-\frac{[b_1,a_3]}{[b_1,b_1]}b_1-\frac{[b_2,a_3]}{[b_2,b_2]}b_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

再把它们规范化，取

$$\xi_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 即为所求.

例：已知 $a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，求一组非零向量 a_2,a_3，使 a_1,a_2,a_3 两两正交.

解　a_2,a_3 应满足方程 $a_1^T x=0$，即 $x_1+x_2+x_3=0$，

它的基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，把基础解系正交化，即得

$$a_2=\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\quad a_3=\xi_2-\frac{[\xi_1,\xi_2]}{[\xi_1,\xi_1]}\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

正交矩阵与正交变换

正交矩阵的定义与性质

1. 定义 如果n阶矩阵A满足 $A^T A = E$ (即$A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$),

那么称A为正交矩阵,简称正交阵.

2. 定理 A为正交阵 $\Leftrightarrow$ A的列(行)向量组为规范正交向量组.

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n), \qquad (\alpha_i^T \alpha_j)_{n\times n} = (\delta_{ij})_{n\times n}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} = E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & if\ i = j \\ 0 & if\ i \neq j \end{cases}$$

$$(i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

例如，矩阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

是正交矩阵.

3. 性质

（1） A为正交阵$\Leftrightarrow A^T$为正交阵　$A^T A = E \Leftrightarrow AA^T = E$

（2） A为正交阵$\Leftrightarrow A^{-1}$为正交阵 $A^T A = E \Leftrightarrow A^{-1}\left(A^{-1}\right)^T = E$

（3） $|A| = \pm 1$　　$A^T A = E \Rightarrow \left|AA^T\right| = |E| \Rightarrow |A|^2 = 1$

（4） A、B为正交阵 $\Rightarrow AB$ 为正交阵

$$(AB)^T (AB) = B^T A^T AB = B^T \left(A^T A\right) B = B^T B = E$$

4、正交变换

若为P正交矩阵，则线性变换$y=Px$称为正交变换.

设$y=Px$为正交变换，则有

$$\|y\| = \sqrt{[y,y]} = \sqrt{y^T y} = \sqrt{x^T P^T P x} = \sqrt{x^T x} = \sqrt{[x,x]} = \|x\|.$$

注：经正交变换后向量的长度保持不变, 内积保持不变, 从而夹角保持不变.

谢　谢