相似矩阵及二次型

向量的内积、长度与正交性

向量的内积

内积的定义与性质

1、定义

设n维实向量 $\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，称实数

$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ 为向量 α 与 β 的内积，记作 $[\alpha,\beta]$.

注：内积是向量的一种运算，其结果是数.

用矩阵形式表示，有 $[\alpha,\beta]=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\alpha^T\beta.$

2、性质

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix},$$

（1）对称性：

$$[\alpha,\beta]=[\beta,\alpha]$$

$$[\alpha,\beta]=\alpha^T\beta=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$$

$$[\beta,\alpha]=\beta^T\alpha=b_1a_1+\cdots+b_na_n$$

（2）线性性：

$$[\alpha+\beta,\gamma]=[\alpha,\gamma]+[\beta,\gamma]$$

$$[k\alpha,\beta]=k[\alpha,\beta]$$

$$[\alpha+\beta,\gamma]=(\alpha+\beta)^T\gamma$$

$$=(a_1+b_1)c_1+\cdots+(a_n+b_n)c_n$$

$$=a_1c_1+\cdots+a_nc_n+b_1c_1+\cdots+b_nc_n$$

$$=[\alpha,\gamma]+[\beta,\gamma]$$

线性组合的内积等于内积的线性组合

（3）正定性：

$[\alpha,\alpha]\geq 0$, 当且仅当 $\alpha\neq 0$ 时 $[\alpha,\alpha]>0.$

向量的长度

1、长度的概念

令$\|\alpha\|=\sqrt{[\alpha,\alpha]}=\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\cdots a_n^{\ 2}}$ 为n维向量α

的长度（模或范数）.

例如：向量（3, 4）的长度为5.

特别地，长度为 1 的向量称为单位向量.

2、向量长度的性质

（1）正定性：$\|\alpha\| \geq 0$; 且 $\alpha = 0 \Leftrightarrow \|\alpha\| = 0$;

（2）齐次性：$\|k\alpha\| = |k| \cdot \|\alpha\|$;

（3）三角不等式：$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$;

（4）柯西—施瓦兹（*Cauchy*—*Schwarz*）不等式：

$$[\alpha,\beta]^2 \le \|\alpha\|^2\|\beta\|^2, \text{即} [\alpha,\beta]^2 \le [\alpha,\alpha][\beta,\beta]$$

当且仅当 α 与 β 的线性相关时，等号成立.

注 ①当 $\alpha \ne 0$ 时，$\alpha^0 = \dfrac{1}{\|\alpha\|}\alpha$ 是α的单位向量.

②由非零向量α得到单位向量 $\alpha^0 = \dfrac{1}{\|\alpha\|}\alpha$ 的过程

称为把α单位化.

3、向量之间的夹角

设α与β为n维空间的两个非零向量，α与β的夹角的余弦为 $\cos\theta=\dfrac{[\alpha,\beta]}{\|\alpha\|\|\beta\|}$，因此$\alpha$与$\beta$的夹角为

$$\theta=\arccos\frac{[\alpha,\beta]}{\|\alpha\|\|\beta\|},\quad 0\le\theta\le\pi.$$

向量的正交化

1、向量正交的定义

当$[\alpha,\beta]=0$，称α与β正交.

注 ① 若$\alpha=0$，则α与任何向量都正交.

② $\alpha\perp\alpha\Leftrightarrow\alpha=0.$

③ 对于非零向量α与β, $\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\angle(\alpha,\beta)=\dfrac{\pi}{2}.$

2、正交向量组

若向量组中的向量两两正交，且均为非零向量，则这个向量组称为正交向量组，简称正交组.

例 已知3维向量空间 R^3 中两个向量 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ 正交，

试求一个非零向量α_3，使α_1， α_2， α_3两两正交.

解 记 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}$，$\alpha_3$应满足齐次线性方程组 $Ax=0$，

$$\alpha_1^T\alpha_2=(1\ 1\ 1)\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=0$$

即 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，基础解系为 $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$， 取 $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，

则 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$两两正交.

定理1 若n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是一组两两正交的非零向量，

则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关.

证 设有$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$使$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_r\alpha_r=0$，

以α_1与上式两端作内积，

$$\lambda_1[\alpha_1,\alpha_1]+\lambda_2[\alpha_1,\alpha_2]+\cdots+\lambda_r[\alpha_1,\alpha_r]=0,$$

因$\alpha_1\neq 0$，故$[\alpha_1,\alpha_1]=\|\alpha_1\|^2\neq 0$，从而必有$\lambda_1=0$，

类似可证$\lambda_2=0,\cdots,\lambda_r=0$. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关.

3、规范正交组

由单位向量组成的正交组称为**规范正交组**.

例如，

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

就是一个规范正交组.

4、正交基

若正交向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为向量空间V上的一个基，

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为向量空间V上的一个正交基.

5、规范正交基

若规范正交组 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 为向量空间V上的一个基，

则称$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 为向量空间V上的一个规范正交基.

例如，

$$e_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ 0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\\ 0\end{pmatrix},e_3=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

就是 R^4 的一个规范正交基.

谢 谢！