向量空间

向量空间的定义与例子

向量空间的基与维数

基变换与坐标变换

向量空间的
定义与例子

定义：设 V 是 n 维向量的集合，如果

① 集合 V 非空，

② 集合 V 对于向量的加法和乘数两种运算封闭，

具体地说，就是：

若 $a \in V$，$b \in V$，则 $a+b \in V$．（对加法封闭）

若 $a \in V$，$l \in R$，则 $la \in V$．（对乘数封闭）

那么就称集合 V 为向量空间．

例：n 维向量的全体

$$\mathbb{R}^n=\left\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\,\middle|\,x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\right\}.$$

$$\forall\ \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n,\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n,$$

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n,$$

$$\forall\ \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n,k\in\mathbb{R},$$

$$k\boldsymbol{x}=(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n,$$ $\mathbb{R}^n$是向量空间.

例：集合 $V_1=\left\{(0,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\,\middle|\,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\right\}$.

$$\forall\ \boldsymbol{x}=(0,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in V_1,\boldsymbol{y}=(0,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in V_1,$$

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(0,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)^{\mathrm{T}}\in V_1,$$

$$\forall\ \boldsymbol{x}=(0,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in V_1,k\in\mathbb{R},$$

$k\boldsymbol{x}=(0,kx_2,\cdots,kx_n)^{\mathrm{T}}\in V_1$, V_1是向量空间.

例：集合 $V_2=\left\{(1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \middle| x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\right\}$.

$\forall\ \boldsymbol{x}=(1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in V_2,\ \boldsymbol{y}=(1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in V_2,$

$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(2,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)^{\mathrm{T}}\notin V_2,$

V_2不是向量空间.

例：n 元齐次线性方程组的解集

$$S_1=\left\{\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\right\}$$

是向量空间，齐次线性方程组的解空间.

n 元非齐次线性方程组的解集

$$S_2=\left\{\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\right\},$$

$$\forall\ \boldsymbol{x}\in S_2,\boldsymbol{y}\in S_2,\ \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\right)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{b},$$

$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\notin S_2$，　S_2 不是向量空间.

例：设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为两个已知的 n 维向量，集合

$$L=\left\{\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}\,\middle|\,\lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$$

是一个向量空间. 这是因为

$$\forall\ \boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\mu_1\boldsymbol{b}\in L,\ \ \boldsymbol{y}=\lambda_2\boldsymbol{a}+\mu_2\boldsymbol{b}\in L,\ \ k\in\mathbb{R},$$

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\left(\lambda_1+\lambda_2\right)\boldsymbol{a}+\left(\mu_1+\mu_2\right)\boldsymbol{b}\in L,$$

$$k\boldsymbol{x}=\left(k\lambda_1\right)\boldsymbol{a}+\left(k\mu_1\right)\boldsymbol{b}\in L,$$ L 是向量空间.

L 称为由向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 所生成的向量空间.

由向量组$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$所生成的向量空间为

$$L=\left\{\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m \middle| \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{R}\right\}.$$

例：设向量组$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$和$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_s$等价，

记 $L_1=\left\{\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m \middle| \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{R}\right\}$,

$$L_2=\left\{\boldsymbol{x}=\mu_1\boldsymbol{b}_1+\mu_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+\mu_s\boldsymbol{b}_s \middle| \mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s\in\mathbb{R}\right\},$$

试证$L_1=L_2$.

证 设 $x \in L_1$，则 x 可由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 线性表示.

因 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ 可由 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_s$ 线性表示，

从而 x 可由 $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_s$ 线性表示，

于是 $x \in L_2$，因此 $L_1 \subseteq L_2$.

类似地可证 $L_2 \subseteq L_1$，所以 $L_1 = L_2$.

结论：等价的向量组生成相同的向量空间.

子空间的概念

定义：如果向量空间V的非空子集合W对于V中所定义的加法及乘数两种运算是封闭的，则称W是V的子空间. 例如，

$$V_1=\left\{(0,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\,\middle|\,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\right\}$$ 是$\mathbb{R}^n$的子空间；

$$V_2=\left\{(1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\,\middle|\,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\right\}$$ 不是$\mathbb{R}^n$的子空间.

向量空间的基与维数

定义：设有向量空间 V，如果在 V 中能选出 r 个向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$，满足

(i) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ 线性无关；

(ii) V 中任意一个向量都能由 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ 线性表示；

那么称向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ 是向量空间 V 的一个基.

r 称为向量空间 V 的维数，并称 V 为 r 维向量空间．

记作 $\dim V = r$.

例：n 维向量的全体

$$\mathbb{R}^n=\left\{\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^{\mathrm{T}}\middle|\,x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\right\}.$$

n维单位坐标向量组

$$\mathrm{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\mathrm{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots\mathrm{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

是$\mathbb{R}^n$的一个基，

$$\dim\mathbb{R}^n=n.$$

例：集合 $V_1=\left\{(0,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\,\middle|\,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\right\}$.

$$\mathrm{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\mathrm{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots\mathrm{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

是 V_1 的一个基，

$$\dim V_1=n-1.$$

例：n 元齐次线性方程组的解空间

$$S_1=\left\{\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n\,\middle|\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\right\},$$

齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系是$S_1$的一个基，

所以S_1的维数$\dim S_1=n-R\left(A\right)$.

例 由向量组 A：$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ 所生成的向量空间

$$L=\left\{\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m \,\middle|\, \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{R}\right\}.$$

若 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ 线性无关，则它是 L 的一个基；

若 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ 线性相关，不妨设它的最大无关组

为 A_0：$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$，于是

$$L=L_1=\left\{\boldsymbol{x}=\mu_1\boldsymbol{a}_1+\mu_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mu_r\boldsymbol{a}_r \,\middle|\, \mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r\in\mathbb{R}\right\}.$$

故向量组 A_0 就是 L 的一个基，$\dim L=r$.

一般来说，若 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in V$，$V$是向量空间，

则 $L=\left\{\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m \mid \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{R}\right\}$

是V的子空间.

若向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ 是向量空间V的一个基，

那么 $V=\left\{\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{a}_m \mid \lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{R}\right\}$.

定义：如果在向量空间V中取定一个基 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$，

那么V中任意一个向量x可唯一表示为

$$x = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_r\boldsymbol{a}_r,$$

数组 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ 称为向量 x 在基 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$

中的坐标.

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{b}_1\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{e}_1}+\boldsymbol{b}_2\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{e}_2}+\boldsymbol{b}_3\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{e}_3}\cdots+\boldsymbol{b}_n\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{e}_n}$$

$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$称为$\mathbb{R}^n$的自然基.

例 设 $A=(a_1,a_2,a_3)=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$，$B=(b_1,b_2)=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$，

验证a_1, a_2, a_3是$\mathbb{R}^3$的一个基，并求b_1, b_2在这个基中的坐标.

解 要证a_1, a_2, a_3是$\mathbb{R}^3$的一个基，只要证a_1, a_2, a_3线性无关，即只要证$A\overset{r}{\sim}E$．要求b_1, b_2在这个基中的坐标，只要解矩阵方程$AX=B$．

$$(A|B)\overset{r}{\sim}(E|A^{-1}B).$$

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{2}{3}\boldsymbol{a}_1 - \frac{2}{3}\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_3, \quad \boldsymbol{b}_2 = \frac{4}{3}\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \frac{2}{3}\boldsymbol{a}_3.$$

基变换与
坐标变换

例：在$\mathbb{R}^3$中取定一个基a_1, a_2, a_3，再取一个新基b_1，b_2, b_3，设$A = (a_1, a_2, a_3)$，$B = (b_1, b_2, b_3)$．求用a_1, a_2, a_3表示b_1, b_2, b_3的表示式（基变换公式）；并求向量在两个基中的坐标之间的关系式（坐标变换公式）．

解　因 $(a_1, a_2, a_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)A$，$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (a_1, a_2, a_3)A^{-1}$，

故 $(b_1, b_2, b_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)B = (a_1, a_2, a_3)A^{-1}B$，

基变换公式 $(b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3)P$,

其中系数矩阵 $P = A^{-1}B$

称为从基 a_1, a_2, a_3 到基 b_1, b_2, b_3 的过渡矩阵.

设向量 x 在基 a_1, a_2, a_3 和基 b_1, b_2, b_3 中的坐标分别为

$$x = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad x = (b_1, b_2, b_3)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3)\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

坐标变换公式

例：在$\mathbb{R}^3$中取定两个基 I 和 II 为

$$\text{I}: \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \text{II}: \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix},$$

(1) 求由基 I 到基 II 的过渡矩阵；

(2) 设向量$\boldsymbol{c}$在 I 中的坐标为$-2,1,2$，

求$\boldsymbol{c}$ 在 II 中的坐标.

解 由基 I 到基 II 的过渡矩阵$P = A^{-1}B$， 其中

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3),\quad B = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3).$$

$$(A,B)=(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2&3\\0&1&1&2&3&7\\0&0&1&1&3&1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&-1&-1&-4\\0&1&0&1&0&6\\0&0&1&1&3&1\end{pmatrix}$$

过渡矩阵

$$P=\begin{pmatrix}-1&-1&-4\\1&0&6\\1&3&1\end{pmatrix}.$$

(2) 易求得$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-18 & -11 & -6\\ 5 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$,

于是c在Ⅱ中的坐标向量为

$$\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18 & -11 & -6\\ 5 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\ -3\\ -2\end{pmatrix},$$

即c在Ⅱ中的坐标为$13,-3,-2$.