线性方程组的解的结构

齐次线性方程组的解的结构

非齐次线性方程组的解得结构

齐次线性方程组的解的结构

回顾：线性方程组的解的判定

包含 n 个未知数的齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $R(A) < n$.

包含 n 个未知数的非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $R(A) = R(A, \boldsymbol{b})$ ，并且当$R(A) = R(A, \boldsymbol{b}) = n$时，方程组有唯一解；

当$R(A) = R(A, \boldsymbol{b}) < n$时，方程组有无限多个解.

下面用向量组线性相关性的理论来讨论方程组的解.

首先讨论齐次方程组的解.

设 $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}.$

若 $x_1 = \xi_{11}, x_2 = \xi_{21}, \cdots, x_n = \xi_{n1}$ 为该方程组的解,

则 $$\boldsymbol{x} = \xi_1 = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{n1} \end{pmatrix}$$

称为该方程组的解向量.

引入集合$S=\left\{\xi \middle| \xi \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{A}\xi=\mathbf{0}\right\}$，称集合$S$为方程组$\boldsymbol{A}x=\mathbf{0}$的解集合．则$S \neq \varnothing$，且满足：

性质1　若$\xi_1, \xi_2 \in S$，则有$\xi_1+\xi_2 \in S$.

证　若$\xi_1, \xi_2 \in S$，则$\boldsymbol{A}\xi_1=\mathbf{0}, \boldsymbol{A}\xi_2=\mathbf{0}$，从而

$\boldsymbol{A}\left(\xi_1+\xi_2\right)=\boldsymbol{A}\xi_1+\boldsymbol{A}\xi_2=\mathbf{0}$，即$\xi_1+\xi_2 \in S$.

性质2 若$\xi \in S$, k为实数, 则$k\xi \in S$.

证 若$\xi \in S$，则$\boldsymbol{A}\xi = \mathbf{0}$ ，于是对任意实数k，有

$\boldsymbol{A}(k\xi) = k(\boldsymbol{A}\xi) = \mathbf{0}$，所以$k\xi \in S$.

如果能求得解集S的一个最大无关组

$$S_0 : \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_t,$$

则方程组的任一解都可由最大无关组S_0线性表示；

另一方面，最大无关组的任何线性组合

$$x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_t\xi_t \quad (k_1, k_2, \cdots, k_t \in \mathbb{R})$$

都是方程组的解，因此上式称为方程组的通解.

齐次线性方程组的解集的最大无关组称为该齐次线性方程组的基础解系.

设 $R(A)=r$，并不妨设 A 的前 r 个列向量线性无关.

$$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n, \end{cases}$$

把 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 作为自由未知数，

$$\boxed{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}}$$

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n, \end{cases}$$

则 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2, \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ -b_{21} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_{12} \\ -b_{22} \\ \vdots \\ -b_{r2} \end{pmatrix}; \cdots, \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ -b_{2,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \end{pmatrix}$

令 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$

得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解为 $\boldsymbol{x} = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \cdots + k_{n-r}\xi_{n-r}.$

定理：设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=r$，则n元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解集 S 的秩$R_S=n-r$.

例 求齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ 2x_1-5x_2+3x_3+2x_4=0, \\ 7x_1-7x_2+3x_3+x_4=0. \end{cases}$

的基础解系和通解.

解

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{7}x_3+\frac{3}{7}x_4, \\ x_2 = \frac{5}{7}x_3+\frac{4}{7}x_4, \end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

则有 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

得基础解系

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

例：设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l}=\boldsymbol{0}$，证明$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\le n$.

证明　记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)$，则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}).$$

即 $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}_j=\boldsymbol{0}\ (j=1,2,\cdots,l).$$

记齐次方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解集合为 S，则$\boldsymbol{\beta}_j\in S$.

于是 $R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_l)\le R_S$.

又$R_S=n-R(\boldsymbol{A})$，所以有$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\le n$.

例：设n元齐次线性方程组$\boldsymbol{A}x=\mathbf{0}$与$\boldsymbol{B}x=\mathbf{0}$同解，

证明$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

证明　由于方程组$\boldsymbol{A}x=\mathbf{0}$与$\boldsymbol{B}x=\mathbf{0}$有相同的解集，

设为S，则有$R(\boldsymbol{A})=n-R_S$且$R(\boldsymbol{B})=n-R_S$.

因此$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

例：证明$R(A^{\mathrm{T}}A)=R(A)$．

证明　只需证方程组$A^{\mathrm{T}}Ax=0$与$Ax=0$同解.

若x满足$Ax=0$，则有$A^{\mathrm{T}}\left(Ax\right)=\left(A^{\mathrm{T}}A\right)x=0$.

若x满足$\left(A^{\mathrm{T}}A\right)x=0$，则$x^{\mathrm{T}}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)x=0$,

即$\left(Ax\right)^{\mathrm{T}}\left(Ax\right)=0$，从而$Ax=0$.

因此方程组$A^{\mathrm{T}}Ax=0$与$Ax=0$同解,

从而$R(A^{\mathrm{T}}A)=R(A)$.

非齐次线性方程组的解的结构

非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \quad (1)$$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0} \quad (2)$$

性质1 若η_1与η_2都是方程$Ax=b$的解，则

$\eta_1-\eta_2$是对应的齐次方程$Ax=0$的解.

证 $A(\eta_1-\eta_2)=A\eta_1-A\eta_2=b-b=0.$

性质2 若η是方程$Ax=b$的解，ξ是方程$Ax=0$

的解，则$\xi+\eta$仍是方程$Ax=b$的解.

证 $A(\xi+\eta)=A\xi+A\eta=0+b=b.$

如果方程组 $Ax=b$ 有一个解为 η^*(称为特解),

那么该方程的任一解 γ 可写为 $\gamma=\eta^*+\left(\gamma-\eta^*\right)$,

其中 $\gamma-\eta^*$ 是对应的齐次方程组 $Ax=0$ 的解.

设 $Ax=0$ 的基础解系为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ ， 于是

$$\gamma-\eta^*=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}, \ (k_1,\cdots,k_{n-r}\in\mathbb{R})$$

所以

$$\gamma=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^* \ (k_1,\cdots,k_{n-r}\in\mathbb{R})$$

非齐次线性方程组的解的结构：

非齐次方程组的通解 = 对应的齐次方程组的通解 + 非齐次方程组的一个特解

求非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{b}$ 的通解的步骤如下:

(1) 验证方程有解, 即验证 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r$;

(2) 在有无穷多解的情况下, 求出对应的齐次方程组的基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$;

(3) 求出原方程组的一个特解 η^*;

(4) 写出方程的通解

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\eta^*\ (k_1,\cdots,k_{n-r}\in\mathbb{R}).$$

例 求解方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

解 对增广矩阵进行初等行变换:

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = 2$，

故方程组有解

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \dfrac{1}{2}, \\ x_3 = 2x_4 + \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

取 $x_2 = x_4 = 0,$

则 $x_1 = x_3 = \dfrac{1}{2},$

即得方程组的特解 $\eta^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应的齐次方程为 $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4, \\ x_3 = 2x_4. \end{cases}$

取 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

则 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，

对应的齐次线性方程组的基础解系为

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$