向量组的秩

向量组秩的定义

向量组秩的求法及相关结论

向量组秩的定义

定义：设有向量组A，在A中选取r个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$满足

(1) 向量组$A_0:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$无关；

(2) 向量组A中任意$r+1$个向量（若存在）都线性相关，

则称向量组A_0是向量组A的一个最大线性无关向量组，简称最大无关组。最大无关组所含向量个数r称为向量组A的秩，记作$R_A=r$.

注：全部由零向量组成的向量组没有最大无关组，

规定这样的向量组的秩为零.

例： 向量组 $A:\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$,

$\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=\mathbf{0}$,

α_1,α_2 为最大无关组，该向量组的秩为 $R_A=2$.

α_1,α_3, α_2,α_3

注：1. 一个向量组的最大无关组是向量组中所含向量个数最多的线性无关的子组之一.

2. 一个向量组的最大无关组不一定是惟一的.

3. 一个向量组与它的最大无关组是等价的.

证：向量组A_0是向量组A的部分组，故A_0组可由A组线性表示. 对A中任一向量α，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha$线性相关，从而$\alpha$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示，从而$A$组可由$A_0$组线性表示.

推论：（最大无关组的等价定义）

设向量组 $A_0: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是向量组 A 的一个部分组，且满足

(1) 向量组 $A_0: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关；

(2) 向量组 A 的任一向量都能由向量组 A_0 线性表示，

则向量组 A_0 是向量组 A 的一个最大无关组.

证：设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1}$ 是 A 中任意 $r+1$ 个向量，

它们都能由 A_0 组线性表示，于是有

$$R\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1}\right)\le R\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\right)=r,$$

所以 A 中任意 $r+1$ 个向量线性相关.

例：求n维向量的全体构成的向量组

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

的一个最大无关组及秩.

解　n 维单位坐标向量

$$\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\mathbf{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

线性无关，　$R_{\mathbb{R}^n}=n.$

$\forall\alpha\in\mathbb{R}^n,$

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

$$=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+\cdots+a_n\mathbf{e}_n,$$

例：设齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad\quad - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$

的通解是 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

试求全体解向量构成的向量组 S 的秩.

$$\boxed{\text{通解是}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

解

$$\boldsymbol{x} = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$$

$$S = \left\{ \boldsymbol{x} = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 \,\middle|\, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

ξ_1, ξ_2 线性无关， $R_S = 2.$

向量组秩的求法及相关结论

回顾,

$$A_{3\times 4}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta_1^{\mathrm{T}} \\ \beta_2^{\mathrm{T}} \\ \beta_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$$

A的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$,

A的行向量组$\beta_1^{\mathrm{T}},\beta_2^{\mathrm{T}},\beta_3^{\mathrm{T}}$.

定理 矩阵的秩等于它的列向量组的秩，也等于它的行向量组的秩.

证 先证明：矩阵的秩等于它的列向量组的秩.

设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)$，$R(A)=r$，$r$ 阶子式 $D_r\neq 0$.

D_r 所在的 r 列构成的 $n\times r$ 矩阵的秩为 r，此 r 列线性无关；又因为 A 中所有 $r+1$ 阶子式均为零，所以 A 中任意 $r+1$ 个列向量构成的 $n\times(r+1)$ 矩阵的秩小于 r，

故此$r+1$列线性相关. D_r所在的r列构成A的列向量组的一个最大无关组，所以列向量组的秩为r.

A^{T}的秩等于A^{T}的列向量组的秩，而$R\left(A^{\mathrm{T}}\right)=R(A)$，$A^{\mathrm{T}}$的列向量组就是$A$的行向量组，所以矩阵的秩也等于它的行向量组的秩.

例：求向量组的一个最大无关组，并用最大无关组表示其它向量.

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}4\\3\\0\\2\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}6\\4\\-2\\3\end{pmatrix}$$

解 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$，

并将矩阵 A 化为行最简形.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&4&1&6\\1&1&3&1&4\\0&0&0&2&-2\\1&0&2&0&3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2&0&3\\0&1&1&0&2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$$

$R(A)=3.$ $\boldsymbol{B}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)$，故由 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)\overset{r}{\sim}(\beta_1,\beta_2,\beta_4)$ 可知 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)=3$，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$线性无关，从而是列向量组的一个最大无关组.

因为$Ax=0$与$Bx=0$同解，也就是方程

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4+x_5\alpha_5=0$$

与

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3+x_4\beta_4+x_5\beta_5=0$$

同解，因此向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$之间的线性关系与向量$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5$之间的线性关系是相同的.

由于$\beta_3=2\beta_1+\beta_2$，$\beta_5=3\beta_1+2\beta_2-\beta_4$，

因此$\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_5=3\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_4$.

定理 向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_l$能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$线性表示的充分必要条件是

$$R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m)=R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_l).$$

向量组的秩

矩阵的秩

关于向量组秩的结论，可以推广到所含向量个数无限的向量组.

例　若向量组 B 可由向量组 A 线性表示，则 $R_B \le R_A$. 其中等号成立当且仅当向量组 A 与向量组 B 等价.

证明　设 $R_A = s, R_B = t$，并设向量组 A 和 B 的最大无关组分别为 $A_0 : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 和 $B_0 : \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$.

由于向量组 B_0 能由向量组 B 线性表示，向量组 B 能由向量组 A 线性表示，向量组 A 能由向量组 A_0

线性表示，因此向量组B_0能由向量组A_0线性表示.

于是$R(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\leq R(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，即$t\leq s$.

向量组A与向量组B等价

$\Longleftrightarrow$ 向量组B可由向量组A线性表示，并且向量组A可由向量组B线性表示.

$\Longleftrightarrow$ $R_B\leq R_A$并且$R_A\leq R_B$.

$\Longleftrightarrow$ $R_A=R_B$.

例 向量组 B 可由向量组 A 线性表示，且它们的秩相等，证明：向量组 A 与向量组 B 等价.

证明 设向量组 C 是由向量组 A 与 B 合并而成的，

由向量组 B 可由向量组 A 线性表示知 $R_A = R_C$.

又已知 $R_A = R_B$，所以有 $R_A = R_B = R_C$，

从而这两个向量组等价.