向量组的

线性相关性

向量组线性相关与线性无关的概念

向量组线性相关性的判别

向量组线性相关性的有关结论

向量组线性相关与线性无关的概念

定义：给定向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，如果存在一组不全为零的实数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}, \qquad (*)$$

则称向量组A是线性相关的.

仅当$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$时$(*)$式才成立，

则称向量组A是线性无关的.

例：向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-5\\8\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，

$3\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3=\mathbf{0}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

n 维单位坐标向量

$$\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\mathbf{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$k_1\mathbf{e}_1+k_2\mathbf{e}_2+\cdots+k_n\mathbf{e}_n=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow k_1=\cdots=k_n=0,$$

$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$ 线性无关.

例： 考虑只有一个向量α的向量组，

如果$\alpha = 0$，则对任意常数$k \neq 0$都有$k\alpha = 0$，

所以当$\alpha = 0$时是线性相关的；

如果$\alpha \neq 0$，则仅当常数$k = 0$时才有$k\alpha = 0$，

所以当$\alpha \neq 0$时是线性无关的.

例：n维向量组 α_1,α_2 线性相关，

存在不全为零的实数 λ_1,λ_2，

使得$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2=\mathbf{0}$.

不防设$\lambda_1\neq 0$，则 $\alpha_1=-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\alpha_2$.

α_1,α_2 线性相关$\Leftrightarrow$ α_1,α_2 的分量对应成比例.

例：向量组

$$\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\5\\9\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}$$ 线性相关.

对任意 $k\neq 0$，均有 $k\cdot\mathbf{0}+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_1+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$.

含零向量的向量组必线性相关.

向量组线性相关性的判别

给定向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，

如何判断它的线性相关性？

考虑等式 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$，

$$\Leftrightarrow \underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix}}_{\beta}=\mathbf{0} \quad \Leftrightarrow A\beta=\mathbf{0}.$$

定理：向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关

$\Longleftrightarrow$ m元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解

$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，$\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_m\right)^{\mathrm{T}}$

$\Longleftrightarrow R(A)<m.$

向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关

$\Longleftrightarrow$ m元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$只有零解

$\Longleftrightarrow R(A)=m.$

例：已知$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}$，试讨论向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 及向量组 α_1,α_2的线性相关性.

解

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，

$R(\alpha_1,\alpha_2)=2$，向量组 α_1,α_2线性无关.

例：已知向量组 a_1,a_2,a_3 线性无关，且 $b_1=a_1+a_2$，$b_2=a_2+a_3$，$b_3=a_3+a_1$，证明向量组 b_1,b_2,b_3 线性无关.

证一　设 $x_1b_1+x_2b_2+x_3b_3=0$，　a_1,a_2,a_3 线性无关，

$$\Rightarrow x_1(a_1+a_2)+x_2(a_2+a_3)+x_3(a_3+a_1)=0$$

$$(x_1+x_3)a_1+(x_1+x_2)a_2+(x_2+x_3)a_3=0$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 \qquad\quad = 0 \\ \qquad\quad x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

所以向量组 b_1,b_2,b_3 线性无关.

例：已知向量组 a_1,a_2,a_3 线性无关，且 $b_1=a_1+a_2$, $b_2=a_2+a_3, b_3=a_3+a_1$, 证明向量组 b_1,b_2,b_3 线性无关.

证二 把已知的三个向量等式写成矩阵等式

$$(b_1,b_2,b_3)=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

记作 $B=AK$.

设 $Bx=0$,

$\Rightarrow (AK)x=0$,

a_1,a_2,a_3 线性无关, $\Rightarrow Kx=0$, $|K|=2\neq 0,\Rightarrow x=0$,

所以向量组 b_1,b_2,b_3 线性无关.

例：已知向量组 a_1,a_2,a_3 线性无关，且 $b_1=a_1+a_2$, $b_2=a_2+a_3, b_3=a_3+a_1$, 证明向量组 b_1,b_2,b_3 线性无关.

证三 把已知的三个向量等式写成矩阵等式

$$(b_1,b_2,b_3)=(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

记作 $B=AK$.

a_1,a_2,a_3 线性无关，

$\Rightarrow R(A)=3$.

又由 $|K|=2\neq 0$ 知 K 可逆，从而 $R(B)=R(A)=3$.

所以向量组 b_1,b_2,b_3 线性无关.

向量组线性相关性的有关结论

定理：向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\left(m\geq 2\right)$线性相关的充分必要条件是其中至少有一个向量可以由其余$m-1$个向量线性表示.

证明 （必要性）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\left(m\geq 2\right)$线性相关，则存在一组不全为零的实数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$. 不防设$k_j\neq 0$，

$$\alpha_j=-\frac{k_1}{k_j}\alpha_1-\cdots-\frac{k_{j-1}}{k_j}\alpha_{j-1}-\frac{k_{j+1}}{k_j}\alpha_{j+1}\cdots-\frac{k_m}{k_j}\alpha_m.$$

定理：向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\left(m\geq 2\right)$线性相关的充分必要条件是其中至少有一个向量可以由其余$m-1$个向量线性表示.

证明　（充分性）设

$$\alpha_j=k_1\alpha_1+\cdots+k_{j-1}\alpha_{j-1}+k_{j+1}\alpha_{j+1}\cdots+k_m\alpha_m,$$

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_{j-1}\alpha_{j-1}-\alpha_j+k_{j+1}\alpha_{j+1}\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0},$$

$k_1,\cdots,k_{j-1},-1,k_{j+1},\cdots,k_m$不全为零,

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\left(m\geq 2\right)$线性相关.

定理：向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\left(m\geq 2\right)$线性无关的充分必要条件是其中任何一个向量都不能由其余$m-1$个向量线性表示.

证明 （必要性）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\left(m\geq 2\right)$线性无关，

若存在一个向量可由其余$m-1$个向量线性表示，

则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\left(m\geq 2\right)$必线性相关，与已知矛盾.

任何一个向量都不能由其余$m-1$个向量线性表示.

定理：向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\left(m\geq 2\right)$线性无关的充分必要条件是其中任何一个向量都不能由其余$m-1$个向量线性表示.

证明 （充分性）假设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\left(m\geq 2\right)$线性相关，必存在一个向量可由其余$m-1$个向量线性表示，与已知矛盾. 所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\left(m\geq 2\right)$线性无关.

定理：向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\,(m\geq 2)$线性相关，则向量组$B:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$也线性相关. 反之，向量组$B$线性无关，则向量组$A$也线性无关.

证明　因为向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，

所以存在一组不全为零的实数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，

使得　$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}.$

于是　$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+0\cdot\alpha_{m+1}=\mathbf{0}.$

所以向量组$B:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1}$也线性相关.

一般地，向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\left(m\geq 2\right)$线性相关，

则向量组$B:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_s$也线性相关.

结论：一个向量组若有线性相关的部分组，

则该向量组线性相关.

一个向量组若线性无关，

则它的任何部分组也线性无关.

定理：m个n维向量组成的向量组，当$n<m$时一定线性相关. 特别地，$n+1$个n维向量必线性相关.

证明　设m个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$构成$n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，当$n<m$时，有$R(\boldsymbol{A})\leq n<m$.

m个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关.

例如，向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$线性相关.

定理：向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\ (m\geq 2)$线性无关，而向量组$B:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$线性相关，则向量$\beta$必能由向量组$A$线性表示，且表示式是惟一的.

证明 记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$，$B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta)$，

问题转化为讨论方程组$Ax=\beta$是否有惟一解.

由于$R(A)\leq R(B)$， 而 $R(A)=m$，$R(B)<m+1$，

所以$m\leq R(B)<m+1$，即$R(B)=m$.

因此方程组$Ax=\beta$有惟一解，从而结论成立.

例 设向量组a_1,a_2,a_3线性相关，a_2,a_3,a_4线性无关，

证明：(1) a_1能由a_2,a_3线性表示；

(2) a_4不能由a_1,a_2,a_3线性表示.

证明 (1) 因a_2,a_3,a_4线性无关，知a_2,a_3线性无关，再由a_1,a_2,a_3线性相关，知a_1能由a_2,a_3表示.

(2) 用反证法. 假设a_4能由a_1,a_2,a_3线性表示，又由(1)知a_1能由a_2,a_3线性表示；于是a_4能由a_2,a_3线性表示，矛盾.