向量组

及其线性组合

向量及向量组的概念

向量组的线性组合

向量组的等价

向量及向量组的概念

定义：n个有次序的数$a_1, a_1, \cdots, a_n$所组成的数组称为n维向量．第 i个数a_i称为第 i个分量．

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

列向量

常用$a, b, \alpha, \beta, \cdots$等表示

$$(a_1,\quad a_2,\quad \cdots,\quad a_n)$$

行向量

常用$a^{\mathrm{T}}, b^{\mathrm{T}}, \alpha^{\mathrm{T}}, \beta^{\mathrm{T}}, \cdots$ 等表示

分量全为实数的向量称为实向量;

分量全为复数的向量称为复向量;

每个分量都是零的向量称为零向量;

行向量和列向量总被看作是两个不同的向量;

当没有明确说明是行向量还是列向量时,

都当作列向量.

n维向量可如同矩阵一样进行运算.

设 λ 是数， n维向量 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，

则 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$， $\lambda\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{pmatrix}$.

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_nb_1 & a_nb_1 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

定义：若干个同维数的列向量（或同维数的行向量）所构成的集合叫做向量组.

例：n维向量的全体所组成的集合

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \middle| \, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

例：若n元齐次线性方程组$Ax=0$有非零解，则它的全体解是一个含有无穷多个n维向量的向量组.

含有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应.

对于一个$m \times n$矩阵有n个m维列向量，有m个n维行向量. 即：矩阵的列向量组与行向量组都是只含有有限个向量的向量组.

例如，

$$A_{3\times 4}=\left(\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \beta_1^{\mathrm{T}} \\ \beta_2^{\mathrm{T}} \\ \beta_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

$$=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)$$

反之，由有限个向量所组成的向量组可以构成一个矩阵.

n 个 m 维列向量所组成的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 构成一个$m\times n$矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$.

m 个 n 维行向量所组成的向量组 $\beta_1^{\mathrm{T}},\beta_2^{\mathrm{T}},\cdots,\beta_m^{\mathrm{T}}$

也构成一个 $m\times n$ 矩阵 $B=\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \beta_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \beta_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$.

向量组的线性组合

定义:给定向量组A: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$, 对于任意

一组数$k_1,k_2,\cdots,k_r$, 称向量

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$$

为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$的一个线性组合,

$k_1,k_2,\cdots,k_r$为该线性组合的组合系数.

定义：设向量组 A：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 及向量 β 有关系

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r,$$

则 β 称为向量组的一个线性组合，或称 β 可由向量组 A 线性表示.

$k_1, k_2, \cdots, k_r$ 称为 β 在该线性组合下的组合系数.

例：设向量组 $A:\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，向量 $\beta=\begin{pmatrix}4\\3\\3\end{pmatrix}$，

易知：

$$\beta=\alpha_1+2\alpha_2=1\cdot\alpha_1+2\alpha_2.$$

线性组合的系数

对于任意的n维向量β，有

$$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=b_1\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}_{\mathbf{e}_1}+b_2\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}_{\mathbf{e}_2}+b_3\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}}_{\mathbf{e}_3}\cdots+b_n\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}}_{\mathbf{e}_n}$$

$\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n$

n维单位坐标向量

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_r\alpha_r,$$

$$\Leftrightarrow \beta = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{Ax} = \beta \text{ 有解 } \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_r \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$.

定理：向量β能由向量组A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表示

$\Longleftrightarrow$ 线性方程组$Ax=\beta$有解，

其中矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)$，$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$.

$\Longleftrightarrow$ $R(A)=R(A,\beta)$.

例：设$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\1\end{pmatrix}$,

证明:向量$\boldsymbol{b}$能由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$线性表示.

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\\1\end{pmatrix}$$

解： 只要证 $R(a_1,a_2,a_3)=R(a_1,a_2,a_3,b)$.

$$(a_1,a_2,a_3,b)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$R(a_1,a_2,a_3)=R(a_1,a_2,a_3,b)=2$$

$$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&0\\2&1&4&3\\2&3&0&1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-3k\\-1+2k\\k\end{pmatrix},\quad k\text{为任意常数.}$$

向量$\boldsymbol{b}$能由向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$线性表示,

$$\boldsymbol{b}=(2-3k)\boldsymbol{a}_1+(-1+2k)\boldsymbol{a}_2+k\boldsymbol{a}_3.$$

向量组的等价

定义：设两向量组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$,

B：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$,

若向量组 B 中每一个向量皆可由向量组 A 线性表示，则称向量组 B 可以由向量组 A 线性表示.

若向量组 A 与向量组 B 能相互线性表示，则称这两个向量组等价.

向量组 A: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$, B: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$,

若向量组 B 可以由向量组 A 线性表示，即：

$$\beta_1 = k_{11}\alpha_1 + k_{21}\alpha_2 + \cdots + k_{r1}\alpha_r,$$

$$\beta_2 = k_{12}\alpha_1 + k_{22}\alpha_2 + \cdots + k_{r2}\alpha_r,$$

$\cdots\cdots$

$$\beta_s = k_{1s}\alpha_1 + k_{2s}\alpha_2 + \cdots + k_{rs}\alpha_r.$$

线性表示的系数矩阵

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{r1} & k_{r2} & \cdots & k_{rs} \end{pmatrix}_{r\times s}$$

$$\underbrace{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)}_{B}=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{r1} & k_{r2} & \cdots & k_{rs} \end{pmatrix}_{r\times s}}_{K}$$

则向量组 B 可由向量组 A 线性表示 $\leftrightarrow B = AK$.

定理：向量组B：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$能由向量组

A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示

$\Longleftrightarrow$ 矩阵方程$AX=B$有解，其中

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r),B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s).$$

$\Longleftrightarrow$ $R(A)=R(A,B)$.

推论：向量组B：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$能由向量组

A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，则

$R(\boldsymbol{B})\le R(\boldsymbol{A})$，其中

$$\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r),\boldsymbol{B}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s).$$

定理：向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$能由向量组

$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示

$\Longleftrightarrow$ 矩阵方程$AX=B$有解，其中

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r),B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s).$$

$$\Longleftrightarrow R(A)=R(A,B).$$

推论:向量组A: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$B$: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$等价

$\Longleftrightarrow$ 矩阵方程$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{BY}=\boldsymbol{A}$同时有解,

其中 $\boldsymbol{A}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\right),\boldsymbol{B}=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\right).$

$\Longleftrightarrow$ $R\left(\boldsymbol{A}\right)=R\left(\boldsymbol{B}\right)=R\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\right).$

例：设

$$a_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\ a_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix},\ b_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix},\ b_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix},$$

证明：向量组 a_1,a_2 与向量组 b_1,b_2,b_3 等价.

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

证：记 $A=(a_1,a_2),B=(b_1,b_2,b_3)$,

只需证明 $R(A)=R(B)=R(A,B)$.

$$(A,B)=\left(\begin{array}{cc|ccc}1&3&2&1&3\\-1&1&0&1&-1\\1&1&1&0&2\\-1&3&1&2&0\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&3&2&1&3\\0&2&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=2$　　又$R(\boldsymbol{B})\le R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=2$,

在矩阵$\boldsymbol{B}$中$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$,　$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

故$R(\boldsymbol{B})\ge 2$.　　向量组$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$与$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$等价.

若$C_{m\times n}=A_{m\times l}B_{l\times n}$，将矩阵$A$、$C$列分块，有

$$(c_1,c_2,\cdots,c_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{pmatrix}$$

结论：矩阵C的列向量组能由矩阵A的列向量组线性表示，B为线性表示的系数矩阵.

若$C_{m\times n}=A_{m\times l}B_{l\times n}$，将矩阵$B$、$C$行分块，有

$$\begin{pmatrix}\gamma_1^{\mathrm{T}}\\ \gamma_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \gamma_m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \beta_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \beta_l^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$$

结论：矩阵C的行向量组能由矩阵B的行向量组线性表示，A为线性表示的系数矩阵.