线性方程组的解

线性方程组有解的充分必要条件

充分必要条件的应用

基本结论

线性方程组有解的充分必要条件

线性方程组　　　　　　　　向量方程

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Longleftrightarrow \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

该方程组如果有解，就称它是相容的；如果无解，

就称它不相容.

$R(A)$　　　$R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Longleftrightarrow \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

定理 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$

(i) 无解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A}) < R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$;

(ii) 有惟一解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = n$;

(iii) 有无限多解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) < n$.

证 只需证明条件的充分性. 设$R(A)=r$.

设$B=(A,b)$的行最简形矩阵为

$$\widetilde{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) $R(A)<R(B)$

⟹ $d_{r+1}=1$

⟹ 无解

证 只需证明条件的充分性. 设$R(A)=r$.

设$B=(A,b)$的行最简形矩阵为

$$\widetilde{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) $R(A)<R(B)$

$\Rightarrow d_{r+1}=1$

$\Rightarrow$ 无解

(iii) $R(A)=R(B)$

$=r<n$

证 只需证明条件的充分性. 设 $R(A)=r$.

设 $B=(A,b)$ 的行最简形矩阵为

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & d_n \end{pmatrix}$$

(i) $R(A)<R(B)$

⟹ $d_{r+1}=1$

⟹ 无解

(iii) $R(A)=R(B)=r<n$

(ii) $R(A)=R(B)=n$

充分必要条件的应用

例 求解齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

解 对方程组的系数矩阵施行初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(A) = 2 < 4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 - \frac{5}{3}x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 0. \end{cases}$$

令 $x_3 = c_1, x_4 = c_2,$

有

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + \frac{5}{3}c_2 \\ -2c_1 - \frac{4}{3}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例 求解非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

解 对增广矩阵施行初等行变换

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$R(\boldsymbol{A}) = 2$, $R(\boldsymbol{B}) = 3$, 所以方程无解.

例 求解非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$

解 对增广矩阵施行初等行变换

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = 2 < 4,$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{4}x_4 + \frac{5}{4}, \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{4}x_4 - \frac{1}{4}, \\ x_3 = x_3, \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad c_1, c_2 \text{为任意常数.}$$

例　设有线性方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda.\end{cases}$$

问 λ 取何值时，此方程组有(1) 惟一解；(2) 无解；(3) 有无限多个解？并在有无限多解时求其通解.

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3,\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda.\end{cases}$$

解法1：对增广矩阵作初等行变换变为行阶梯形矩阵.

$$B=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3-(1+\lambda)r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & -\lambda & -\lambda(2+\lambda) & -\lambda(1+\lambda)\end{pmatrix}\overset{r_3+r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda)\end{pmatrix}$$

注意：

对含参数的矩阵作初等变换时，由于$\lambda+1$、$\lambda+3$等因式可能等于零，故不宜进行下列的变换：

$$r_2-\frac{1}{1+\lambda}r_1, \quad r_3\times\frac{1}{\lambda+3}.$$

如果作了这样的变换，则需对$\lambda=-1$(或$\lambda=-3$)的情况另作讨论.

$$B=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda)\end{pmatrix}$$

当$\lambda\neq 0$且$\lambda\neq -3$时，$R(A)=R(B)=3$，方程组有惟一解.

当$\lambda=0$时，$R(A)=1$，$R(B)=2$，方程组无解.

当$\lambda=-3$时，$R(A)=R(B)=2$，方程组有无穷多解.

当$\lambda=-3$时，

$$B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & -2 & -3\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

由此得通解

$$\begin{cases}x_1=x_3-1,\\ x_2=x_3-2,\end{cases}$$

x_3可任意取值

即 $$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ 0\end{pmatrix},\quad (c\in\mathbb{R})$$

解法2：因为系数矩阵A是方阵，所以方程组有唯一解的充分必要条件是 $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)\lambda^2,$$

因此，当 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \neq -3$ 时，方程组有惟一解.

当$\lambda=0$时,

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&3\\1&1&1&0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$R(A)=1,\ R(B)=2,$ 方程组无解.

当$\lambda=-3$ 时,

$$B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A)=R(B)=2$,方程组有无穷多解.

通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (c\in\mathbb{R})$

同濟大學
1907
TONGJI UNIVERSITY

基本结论

线性方程组理论中两个最基本的定理：

定理 n元齐次线性方程组$Ax=0$有非零解的充分必要条件是 $R(A)<n$.

定理 n元线性方程组$Ax=b$有解的充分必要条件是$R(A)=R(A,b)$.

定理：矩阵方程 $AX=B$ 有解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,B)$.

证 设 A 是 $m\times n$ 矩阵， B 是 $m\times l$ 矩阵， X 是 $n\times l$ 矩阵.

记 $X=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_l)$, $B=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)$.

$$AX=B \Leftrightarrow A(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_l)=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_l)$$

$$\Leftrightarrow A\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{b}_i \quad (i=1,2,\cdots l)$$

设 $R(A)=r$, A 的行最简形为 $\tilde{A}$,则 $\tilde{A}$ 有 r 个非零行,

且 $\tilde{A}$ 的后 $m-r$ 行全是零. 再设

$$(A,B)=(A,b_1,b_2,\cdots,b_l)\overset{r}{\sim}(\tilde{A},\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\cdots,\tilde{b}_l)$$

从而 $(A,b_i)\overset{r}{\sim}(\tilde{A},\tilde{b}_i)\quad(i=1,2,\cdots,l)$

矩阵方程 $AX=B$ 有解

$\Leftrightarrow Ax_i=b_i\quad(i=1,2,\cdots l)$有解

$\Leftrightarrow R(A)=R(A,b_i)\quad(i=1,2,\cdots,l)$

$\Leftrightarrow \tilde{b}_i$ 的后 $m-r$ 行全是零$(i=1,2,\cdots,l)$

$\Leftrightarrow (\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\cdots,\tilde{b}_l)$的后 $m-r$ 行全是零

$\Leftrightarrow R(A,B)=r=R(A).$

例 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&5\\3&1\\4&3\end{pmatrix}$, 求矩阵 X,使得$AX=B$.

解 $$(A\,|\,B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&3&2\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&1&3\end{array}\right)$$

$R(A)=R(A,B)=3$, 所以有解

$$X=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-3\\1&3\end{pmatrix}.$$

定理：设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，则 $R(\boldsymbol{C})\le\min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$.

证明：由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 知 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{C}$ 有解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$． 于是

$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$. 由 $R(\boldsymbol{C})\le R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$ 知 $R(\boldsymbol{C})\le R(\boldsymbol{A})$.

又由 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 知 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$ 有解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，

同理可得，$R(\boldsymbol{C})\le R(\boldsymbol{B})$.

综合便得 $R(\boldsymbol{C})\le\min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}$.

同濟大學

1907

TONGJI UNIVERSITY