矩阵的秩

矩阵秩的定义

矩阵秩的求法

矩阵秩的性质

矩阵秩的定义

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_4 + c_2 \\ c_5 - 4c_1 \\ c_5 - 3c_2 \\ c_5 + 3c_3}]{\substack{c_3 \leftrightarrow c_4 \\ c_4 + c_1}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = F$$

$$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$$

标准形矩阵

标准形矩阵由m、n、r三个参数完全确定，其中 r 就是行阶梯形矩阵中非零行的行数.

定义：在 $m\times n$ 矩阵 A 中，任取 k 行 k 列($k\le m$，$k\le n$)，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 A 中所处的位置次序而得的 k 阶行列式，称为矩阵 A 的 k 阶子式.

$m\times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k C_n^k$ 个.

$$R=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{vmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

非零子式

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

R中的非零子式的最高阶数是3

定义　设矩阵A中有一个不等于零的r阶子式D，且所有$r+1$阶子式(如果存在的话)全等于零，那么D称为矩阵A的最高阶非零子式，数r称为矩阵A的秩，记作$R(A)$.

根据行列式按行（列）展开法则可知，矩阵A中任何一个$r+2$阶子式（如果存在的话）都可以用$r+1$阶子式来表示. 如果矩阵A中所有$r+1$阶子式都等于零，那么所有$r+2$阶子式也都等于零.

于是，所有高于$r+1$阶的子式（如果存在的话）也都等于零.

因此矩阵A的秩就是A中非零子式的最高阶数.

定义 设矩阵A中有一个不等于零的r阶子式D，且所有$r+1$阶子式(如果存在的话)全等于零，那么D称为矩阵A的最高阶非零子式，数r称为矩阵A的秩，记作$R(A)$.

规定 零矩阵的秩等于零.

显然，$0 \le R(A) \le \min\{m, n\}$.

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(\boldsymbol{R}) = 3.$

非零子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$\boldsymbol{R}$中的非零子式的最高阶数是3

若矩阵 A 中有某个 s 阶子式不等于零，则 $R(A) \geq s$；

若矩阵 A 中所有 t 阶子式等于零，则 $R(A) < t$．

若 A 为 n 阶矩阵，当 $|A| \neq 0$ 时，$R(A) = n$；

可逆矩阵，非奇异矩阵，满秩矩阵．

当 $|A| = 0$ 时，$R(A) < n$；

不可逆矩阵，奇异矩阵，降秩矩阵．

$$R\left(A^{\mathrm{T}}\right)=R(A)$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \qquad A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad = \quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}$$

A^{T}的子式与A的子式对应相等，从而$R\left(A^{\mathrm{T}}\right)=R(A)$.

矩阵秩的求法

例：求矩阵 A 和 B 的秩，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 4 & 7 & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 5 & 0\\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3\\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

解：在 A 中，2 阶子式 $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\neq 0$，

$|A|=0$，因此 $R(A)=2$.

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R(\boldsymbol{R})=3.$$

行阶梯形矩阵的秩就等于非零行的行数.

初等行变换可将一般的矩阵化为行阶梯形矩阵.

？ 两个等价的矩阵的秩是否相等?

引理 设$A\overset{r}{\sim}B$，则$R(A)=R(B)$.

证明思路：

证明A经过一次初等行变换变为B,

则$R(A)\le R(B)$.

B也可经由一次初等行变换变为A,

则$R(A)\ge R(B)$. 于是$R(A)=R(B)$.

定理 若 $A\sim B$，则$R(A)=R(B)$.

证明： 设 A 经过初等列变换变为 B，

则A^{T}经过初等行变换变为B^{T}，从而

$$R(A)=R(A^{\mathrm{T}})=R(B^{\mathrm{T}})=R(B).$$

例：设$A=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1\\2&-4&8&0\\-2&4&-2&3\\3&-6&0&-6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$，求矩阵 A 及矩阵$B=(A|\boldsymbol{b})$的秩.

$R(A)=2,$
$R(B)=3.$

解：
$$B=\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&2&-1&1\\2&-4&8&0&2\\-2&4&-2&3&3\\3&-6&0&-6&4\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&2&-1&1\\0&0&2&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & \lambda & -1 \\ 5 & 6 & 3 & \mu \end{pmatrix}$，已知 $R(A)=2$，求 λ 与 μ 的值.

解

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & \lambda+3 & -4 \\ 0 & 0 & 5-\lambda & \mu-1 \end{pmatrix}$$

因 $R(A)=2$，于是

$$\begin{cases} 5-\lambda=0, \\ \mu-1=0, \end{cases}$$ 即 $$\begin{cases} \lambda=5, \\ \mu=1. \end{cases}$$

矩阵秩的性质

（1）若 A 为 $m \times n$ 矩阵，则 $0 \le R(A) \le \min\{m, n\}$.

（2）$R(A) = R(A^{\mathrm{T}})$.

（3）若 $A \sim B$，则 $R(A) = R(B)$.

（4）若 P、Q 可逆，则 $R(PAQ) = R(A)$.

（5）$\max\{R(A), R(B)\} \le R(A, B) \le R(A) + R(B)$.

特别地，当$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{b}$为非零列向量时，有

$$R(A)\le R(A,\boldsymbol{b})\le R(A)+1.$$

（6）$R(A+B)\le R(A)+R(B).$

（7）$R(AB)\le \min\left\{R(A),R(B)\right\}.$

（8）若$A_{m\times n}B_{n\times l}=0$，则$R(A)+R(B)\le n.$

（5）、（6）、（7）、（8）的证明在以后的章节给出.

例：设A为n阶矩阵，证明$R(A+E)+R(A-E)\geq n.$

证明 因$(A+E)+(E-A)=2E$，由性质（6），有

$$R(A+E)+R(E-A)\geq R(2E)=n.$$

而$R(A-E)=R(E-A)$,

所以 $R(A+E)+R(A-E)\geq n.$

例：若$A_{m\times n}B_{n\times l}=C$，且$R(A)=n$，则$R(B)=R(C)$.

分析：若$R(A)=n$，则A的行最简形矩阵应该满足：

$$\left.\begin{array}{l}\text{有 } n \text{ 个非零行；}\\ \text{每个非零行的第一个非零元为 } 1\text{；}\\ \text{每个非零元所在的列的其它元素都为零.}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{恰好有}\\ n\text{个}1\end{array}$$

所以 A 的行最简形矩阵为$\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$.

例：若$A_{m\times n}B_{n\times l}=C$，且$R(A)=n$，则$R(B)=R(C)$.

证明：因为$R(A)=n$，所以 A 的行最简形为$\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$.

于是存在m阶可逆阵P，

满足$PA=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}$，

于是

$$PC=PAB=\begin{pmatrix} E_n \\ O \end{pmatrix}B=\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}.$$

因为$R(C)=R(PC)$，而$R\begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix}=R(B)$，

所以$R(B)=R(C)$.

注：

当一个矩阵的秩等于它的列数时，这样的矩阵称为列满秩阵. 特别地，当列满秩矩阵为方阵时，就成为满秩矩阵，也就是可逆矩阵.

本题中，当 $C=O$，这时结论为：

设 $AB=O$，若 A 为列满秩矩阵，则 $B=O$.