矩阵的初等变换

矩阵的初等变换的定义

初等变换的应用(一)—解线性方程组

初等矩阵与初等变换的性质

初等变换的应用(二)

初等矩阵及初等变换的性质

一、初等矩阵

定义：由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

三种初等变换对应着三种初等矩阵.

(1) 对调单位阵的第 i, j 行（列），得初等阵

$$
E(i,j)=\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & & \cdots & 1 & & & \\
 & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & \cdots & & \cdots & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

(2)以常数 $k \neq 0$乘单位阵第 i 行（列），得初等阵

$$E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

(3) 以 k 乘单位阵第 j 行后，再加到第 i 行，或以 k 乘单位阵第 i 列后，再加到第 j 列，得初等阵

$$E(ij(k))=\left(\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & \cdots & k & & \\
 & & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\
\\
i \\
\\
j \\
\\
\\
\end{array}$$

初等变换	初等矩阵	逆变换	逆矩阵
$r_i \leftrightarrow r_j,$	$E(i,j),$	$r_i \leftrightarrow r_j,$	$E(i,j)^{-1} = E(i,j),$
$r_i \times k,$	$E(i(k)),$	$r_i \times \frac{1}{k},$	$E(i(k))^{-1} = E\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right),$
$r_i + kr_j,$	$E(ij(k)),$	$r_i - kr_j,$	$E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k)).$

$$A_{3\times 4}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \qquad E(2,3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E(2,3)A_{3\times 4}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times 4}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \quad E_4(2,3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times 4}E_4(2,3)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

性质1　设A是一 $m\times n$矩阵，对 A 施行一次初等行变换，相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

性质2　方阵A可逆的充要条件是存在有限个初等矩阵

$P_1, P_2, \cdots, P_l$, 使 $A = P_1P_2\cdots P_l$.

证明　充分性　$A = P_1P_2\cdots P_l$, 初等阵可逆，故A可逆.

必要性　$A \overset{r}{\sim} B$, B为A的行最简形矩阵.

可逆

可逆

存在有限个初等阵$Q_1, \cdots, Q_l$,　　使$Q_l\cdots Q_2Q_1A = B = E$.

从而B的非零行数为n，即B有n个首非零元1, B只有n列,

$$A = Q_1^{-1}Q_2^{-1}\cdots Q_l^{-1}B = Q_1^{-1}Q_2^{-1}\cdots Q_l^{-1}E = P_1P_2\cdots P_l.$$

定理1　设 A 与 B 为$m\times n$矩阵，那么

(i) $A\overset{r}{\sim}B\Leftrightarrow$存在$m$阶可逆矩阵$P$，使得$PA=B$；

证明　$A\overset{r}{\sim}B\Leftrightarrow A$经过有限次初等行变换变成$B$

$\Leftrightarrow$存在有限个m阶初等阵$P_1,P_2,\cdots,P_l$,

使$P_l\cdots P_2P_1A=B$

$\Leftrightarrow$存在m阶可逆阵P，使$PA=B$.

定理1　设 A 与 B 为 $m\times n$ 矩阵，那么

(i) $A\overset{r}{\sim}B \Leftrightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 P，使得 $PA=B$；

(ii) $A\overset{c}{\sim}B \Leftrightarrow$ 存在 n 阶可逆矩阵 Q，使得 $AQ=B$；

(iii) $A\sim B \Leftrightarrow$ 存在 m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆阵 Q，使 $PAQ=B$.

初等变换的应用(二)

一、求矩阵的逆矩阵

若 $|A| \neq 0$, $\quad A = P_1 P_2 \cdots P_l$,

$P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A = E$, $\ P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} E = A^{-1}$,

$$P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} \left(A \mid E \right)$$

$$= \left(P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A \mid P_l^{-1} P_{l-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} E \right)$$

$$= \left(E \mid A^{-1} \right).$$

例 设$A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 3 & 0 & -2\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$，证明$A$可逆，并求$A^{-1}$.

解

$$(A\,|\,E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6\end{array}\right)$$

例 设$A=\begin{pmatrix}0&-2&1\\3&0&-2\\-2&3&0\end{pmatrix}$，证明$A$可逆，并求$A^{-1}$.

解

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&-2&1&1&0&0\\3&0&-2&0&1&0\\-2&3&0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&6&3&4\\0&1&0&4&2&3\\0&0&1&9&4&6\end{array}\right)$$

故A可逆，且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}6&3&4\\4&2&3\\9&4&6\end{pmatrix}.$$

二、解矩阵方程 $AX = B$

若 $|A| \neq 0$，　$X = A^{-1}B$, $A = P_1P_2\cdots P_l$,

$$P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}A = E,\ P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}B = A^{-1}B = X,$$

$$P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}(A\,|\,B)$$

$$=\left(P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}A\ \middle|\ P_l^{-1}P_{l-1}^{-1}\cdots P_1^{-1}B\right)$$

$$=\left(E\ \middle|\ A^{-1}B\right).$$

例 解矩阵方程 $AX=B$, 其中

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-3\\1&2&-2\\-1&3&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\-2&5\end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-4&2\\0&1\\-3&2\end{pmatrix}.$$

解

$$(A\,|\,B)=\left(\begin{array}{ccc|cc}2&1&-3&1&-1\\1&2&-2&2&0\\-1&3&2&-2&5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&-4&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&-3&2\end{array}\right)$$

如果要求解矩阵方程$YA=C$，则可对矩阵$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$作初等列变换$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \overset{c}{\sim} \begin{pmatrix} E \\ CA^{-1} \end{pmatrix}$，即可得$Y=CA^{-1}$.

也可改为对$(A^{\mathrm{T}}, C^{\mathrm{T}})$作初等行变换

$$(A^{\mathrm{T}}, C^{\mathrm{T}}) \overset{r}{\sim} (E, (A^{\mathrm{T}})^{-1} C^{\mathrm{T}}),$$

即可得$Y^{\mathrm{T}} = \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}}$，于是$Y=CA^{-1}$.

同濟大學

1907

TONGJI UNIVERSITY