矩阵的初等变换

矩阵的初等变换的定义

初等变换的应用(一)—解线性方程组

初等矩阵与初等变换的性质

初等变换的应用(二)

矩阵初等变换的定义

引例：求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\xrightarrow[③\div 2]{① \leftrightarrow ②} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9, & ④ \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (B_1)$$

$$\xrightarrow[\substack{③-2① \\ ④-3①}]{②-③} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3, & ④ \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (B_2)$$

$$\xrightarrow[\substack{③+5② \\ ④-3②}]{② \div 2} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ 2x_4 = -6, & ③ \\ x_4 = -3, & ④ \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (B_3)$$

$\xrightarrow[④-2③]{③\leftrightarrow④}$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, & ② \\ x_4 = -3, & ③ \\ 0 = 0, & ④ \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots (B_4)$$

$\xrightarrow[②-③]{①-②}$
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 4, \\ x_2 - x_3 = 3, \\ x_4 = -3, \\ 0 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 4, \\ x_2 = x_3 + 3, \\ x_4 = -3. \end{cases}$$

其中 x_3 可任意取值.

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 4, \\ x_2 = x_3 + 3, \\ x_4 = -3. \end{cases}$$

令 $x_3 = c$，有

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix},$$

其中c为任意常数.

三种变换：

交换方程的次序，

记作：ⓘ$\leftrightarrow$ⓙ；逆变换：ⓘ$\leftrightarrow$ⓙ；

以常数 $k\neq 0$ 乘某个方程，

记作：ⓘ$\times k$；　逆变换：ⓘ$\div k$；

一个方程加上另一个方程的k倍，

记作：ⓘ$+k$ⓙ；逆变换：ⓘ$-k$ⓙ.

1. 变换前后的方程组同解；

2. 只有方程组的系数和常数参与运算.

对原方程组增广矩阵的行的变换.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. & ④ \end{cases} \xrightarrow[③\div 2]{① \leftrightarrow ②} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9, \end{cases}$$

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \times \frac{1}{2}]{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{array}\right) = B_1$$

定义：下列三种变换称为矩阵的初等行变换：

交换矩阵的两行，记作：$r_i \leftrightarrow r_j$；

以常数$k \neq 0$乘某一行，记作：$r_i \times k$；

把某一行所有元的k倍加到另一行对应的元上去，记作：$r_i + kr_j$．

逆变换：$r_i \leftrightarrow r_j$；$r_i \times \frac{1}{k}$；$r_i - kr_j$．

把定义中的"行"换成"列"，就得到矩阵的初等列变换的定义．

初等变换 $\begin{cases} \text{初等行变换;} \\ \text{初等列变换.} \end{cases}$

矩阵A经有限次初等行变换变成矩阵B，就称矩阵A与B行等价，记作$A\overset{r}{\sim}B$.

矩阵A经有限次初等列变换变成矩阵B，就称矩阵A与B列等价，记作$A\overset{c}{\sim}B$.

矩阵A经有限次初等变换变成矩阵B，就称矩阵A与B等价，记作$A\sim B$.

矩阵之间的等价关系具有下列性质：

反身性：$A \sim A$;

对称性：若 $A \sim B$, 则 $B \sim A$;

传递性：若 $A \sim B$, $B \sim C$, 则 $A \sim C$.

初等变换的应用(一)

—解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9. \end{cases} \to \cdots \to \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_4 = -3, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = B_4$$

行阶梯形矩阵

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_4 = -3, \\ 0 = 0. \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 4, \\ x_2 - x_3 = 3, \\ x_4 = -3, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

$$B_4 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = B_5$$

行最简形矩阵

$$B_5=\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\rightarrow\begin{cases}x_1=4+x_3,\\x_2=3+x_3,\\x_4=-3,\end{cases}$$

令 $x_3=c$，有 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c+4\\c+3\\c\\-3\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\3\\0\\-3\end{pmatrix}$,

其中c为任意常数.

例：求解线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

解　化线性方程组的增广矩阵为行最简形：

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

例：求解线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

解　化线性方程组的增广矩阵为行最简形：

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

例：求解线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$

解 化线性方程组的增广矩阵为行最简形：

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

方程组有解：

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$