克拉默法则

设有n个未知数 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$Ax = b$$

系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \quad b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$$

克拉默法则：

如果线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵的行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则该线性方程组有惟一解：

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|},\ x_2=\frac{|A_2|}{|A|},\ \cdots,\ x_n=\frac{|A_n|}{|A|}$$

$$A_i=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

证明 $|A| \neq 0$，所以系数矩阵 A 可逆. 令 $x = A^{-1}b$,

有 $Ax = A(A^{-1}b) = b$, 故 $x = A^{-1}b$ 是 $Ax = b$ 的解向量.

由 $Ax = b$ 有 $A^{-1}Ax = A^{-1}b$，即 $x = A^{-1}b$, 逆矩阵惟一

故 $x = A^{-1}b$ 是 $Ax = b$ 的惟一解向量.

由 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}A^{*}$ 有 $x = A^{-1}b = \dfrac{1}{|A|}A^{*}b$，即

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \cdots + b_n A_{n1} \\ b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \cdots + b_n A_{n2} \\ \vdots \\ b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \cdots + b_n A_{nn} \end{pmatrix},
$$

即： $x_i = \dfrac{1}{|A|}\left(b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \cdots + b_n A_{ni}\right)$

第i列

$$
= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{|A|}\left|A_i\right| \quad (i = 1, 2, \cdots, n).
$$

例 分别用克拉默法则和逆矩阵方法求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

解:(1)用克拉默法则

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

$$x_1 = \frac{1}{|A|}|A_1| = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 5;$$

$$x_2 = \frac{1}{|A|}|A_2| = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$x_3 = \frac{1}{|A|}|A_3| = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3.$$

(2)用逆矩阵方法

因 $|A| = 3 \neq 0$，故 A 可逆，且 $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$，

$$x = A^{-1}b$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

即有

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

注:从上例看到，利用克拉默法则求解一个含3个方程、3个未知量的线性方程组，需要计算 4个三阶行列式，计算量较大!

“克拉默法则”只能处理特殊的线性方程组，

即方程个数与未知量个数相等的线性方程组.

同濟大學
1907
TONGJI UNIVERSITY