逆矩阵

逆矩阵的定义和性质

求逆公式

逆矩阵的初步应用

逆矩阵的初步应用

例 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}$，

求矩阵 X，使其满足 $AXB=C$.

解 若A^{-1}、B^{-1}存在，则用A^{-1}左乘上式，用B^{-1}右乘上式，得 $A^{-1}(AXB)B^{-1}=A^{-1}CB^{-1}$，即：$X=A^{-1}CB^{-1}$.

因为$|A| = 2 \neq 0$，$|B| = 1 \neq 0$，所以A^{-1}、B^{-1}都存在.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix},$$

于是 $$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

例 设 $P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $AP=P\Lambda$，求 A^n.

解 $|P|=2$, $P^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $A=P\Lambda P^{-1}$,

$$A^2=(P\Lambda P^{-1})\cdot(P\Lambda P^{-1})=P\Lambda^2P^{-1},$$

$$\cdots,$$

$$A^n=P\Lambda^nP^{-1},$$

而

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\Lambda}^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^2\end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \boldsymbol{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix},$$

故

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2-2^n & 2^n-1\\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1\end{pmatrix}.$$

矩阵多项式 $f(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_{n-1}A^{n-1}+a_nA^n$,

(i)如果$A=P\Lambda P^{-1}$, 则 $A^k=P\Lambda^kP^{-1}$, 从而

$$\begin{aligned}f(A)&=a_0E+a_1A+\cdots+a_{n-1}A^{n-1}+a_nA^n\\&=P(a_0E)P^{-1}+P(a_1\Lambda)P^{-1}+\cdots+P(a_n\Lambda^n)P^{-1}\\&=Pf(\Lambda)P^{-1}.\end{aligned}$$

(ii)如果 $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$,

则 $\Lambda^k = diag(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k)$, 从而

$$f(\Lambda) = a_0 E + a_1 \Lambda + \cdots + a_{n-1} \Lambda^{n-1} + a_n \Lambda^n$$

$$= \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

例 设 $P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&2\\1&1&-1\end{pmatrix}, \Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&-3\end{pmatrix}, AP=P\Lambda,$

求 $\varphi(A)=A^3+2A^2-3A$.

解 因为 $|P|=6\neq 0$，所以 P 可逆，从而

$$A=P\Lambda P^{-1},\quad \varphi(A)=P\varphi(\Lambda)P^{-1}.$$

而 $\varphi(1)=1^3+2\cdot 1^2-3=0$，$\varphi(2)=10$，$\varphi(-3)=0$，

于是

$$\varphi(\Lambda)=\begin{pmatrix}\varphi(1) & & \\ & \varphi(2) & \\ & & \varphi(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 10 & \\ & & 0\end{pmatrix}.$$

通过计算得

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix},$$

所以 $\varphi(A) = \boldsymbol{P}\varphi(\Lambda)\boldsymbol{P}^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 10 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

同濟大學
1907
TONGJI UNIVERSITY