逆矩阵

逆矩阵的定义和性质

求逆公式

逆矩阵的初步应用

逆矩阵的定义和性质

定义 设 A 为 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 B，使得

$$AB = BA = E,$$

则称矩阵 A 是可逆的，并称 B 是 A 的逆矩阵.

注：若 n 阶方阵 A 可逆，则其逆矩阵是唯一的！

设 B_1, B_2 都是 A 的逆矩阵，

A 的逆矩阵记为 A^{-1}

$$B_1 = B_1E = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = EB_2 = B_2.$$

逆矩阵满足的运算规律（逆矩阵的性质）：

(i) 若矩阵 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，且 $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$；

(ii) 若 A 可逆，数 $\lambda \neq 0$，则 λA 可逆，且 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$；

$$(\lambda A)\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right)=\left(\lambda\frac{1}{\lambda}\right)\left(AA^{-1}\right)=E.$$

$$\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right)(\lambda A)=\left(\lambda\frac{1}{\lambda}\right)\left(A^{-1}A\right)=E.$$

(iii) 若A、B 为同阶矩阵且均可逆，则AB可逆，且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1};$$

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)=A\left(BB^{-1}\right)A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E.$$

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB)=B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E.$$

(iv) 若A可逆，则A^{T} 也可逆，且$\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$.

$$A^{\mathrm{T}}\left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\left(A^{-1}A\right)^{\mathrm{T}}=E. \qquad \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=E.$$

当A可逆时，还可以定义 $A^{-k}=\left(A^{-1}\right)^{k}$，其中 $k\in\mathbb{Z}^{+}$.

当方阵 A 可逆，λ、μ 为整数时，有

$$A^{\lambda}A^{\mu}=A^{\lambda+\mu},\qquad \left(A^{\lambda}\right)^{\mu}=A^{\lambda\mu}.$$

定理1 若 n 阶方阵A 可逆，则 $|A| \neq 0.$

证明 若方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，即存在矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E},$$

由行列式的性质，得

$$\left|\boldsymbol{A}\right| \cdot \left|\boldsymbol{B}\right| = \left|\boldsymbol{AB}\right| = \left|\boldsymbol{BA}\right| = \left|\boldsymbol{E}\right| = 1,$$

所以 $\left|A\right| \neq 0.$

定理2 若 $|A| \neq 0$，则矩阵 A 可逆，且 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A^{*}$.

证明　设 A^{*} 是矩阵 A 的伴随矩阵，于是有

$$\left.\begin{aligned} &AA^{*} = A^{*}A = |A|E, \\ &|A| \neq 0, \end{aligned}\right\} \quad A\left(\frac{1}{|A|}A^{*}\right) = \left(\frac{1}{|A|}A^{*}\right)A = E,$$

所以矩阵 A 可逆，且 $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A^{*}$.

A是可逆矩阵的充分必要条件是 $|A| \neq 0$.

当 $|A| = 0$时，A 称为奇异矩阵，

当 $|A| \neq 0$时，A 称为非奇异矩阵.

可逆矩阵就是非奇异矩阵.

推论 若 $AB = E$ （或 $BA = E$），则 $B = A^{-1}$.

例：求矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 可逆的充分必要条件，

并在可逆时，求其逆矩阵.

解 $|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$， A 可逆 $\Leftrightarrow ad-bc\neq 0.$

当 $ad-bc\neq 0$ 时， $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^{*}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$

例：求方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 $|A|=2\neq 0$, A^{-1}存在. 再计算$|A|$的余子式.

$M_{11}=2,\ M_{12}=3,\ M_{13}=2,\ M_{21}=-6,\ M_{22}=-6,$

$M_{23}=-2,\ M_{31}=-4,\ M_{32}=-5,\ M_{33}=-2,$

求逆公式

$$A^{*}=\begin{pmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32} \\ M_{13} & -M_{23} & M_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

所以

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$M_{11}=2,\ M_{12}=3,$
$M_{13}=2,\ M_{21}=-6,$
$M_{22}=-6, M_{23}=-2,$
$M_{31}=-4, M_{32}=-5,$
$M_{33}=-2,$

注：求逆公式 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^{*}$ 主要用来理论证明和推导，很少用来计算. 若要根据求逆公式来求 n 阶方阵的逆矩阵，需要计算 n 阶行列式 $|A|$ 以及 n^{2} 个 $n-1$ 行列式 A_{ij}，运算量非常大！

对于低阶以及某些特殊矩阵的讨论，此公式仍可以给我们带来一些便利.

同济大学

1907

TONGJI UNIVERSITY