矩阵的运算

矩阵的加法

数与矩阵相乘

矩阵的线性运算

矩阵与矩阵相乘

矩阵的转置

方阵的行列式

矩阵的转置

1.矩阵的转置及性质

定义 把矩阵A的行换成同序数的列得到一个新矩阵，叫做矩阵A的转置矩阵， 记为A^{T}.

例：设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}_{2\times 3}$， 则 $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}_{3\times 2}$.

矩阵转置的性质：

(1) $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=A$;　　由矩阵转置的定义即得.

(2) $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$;

(3) $(A \cdot B)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}} \cdot A^{\mathrm{T}}$.

(4) $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$.

①等号两端的矩阵是同型矩阵.

②等号两端的矩阵对应位置上的元素相等.

例：已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求$(AB)^{\mathrm{T}}$.

解法1：$AB=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 14 & -3 \\ 17 & 13 & 10 \end{pmatrix}$,

$$(AB)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 14 & 13 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

例：已知 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求 $(AB)^{\mathrm{T}}$.

解法2：

$$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 7 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{pmatrix}.$$

例：已知$\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，$A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，求$A^n$.

3行3列矩阵

解：注意到 $\beta^T\alpha=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2$，

1行1列矩阵

$$A^n=(\alpha\beta^{\mathrm{T}})(\alpha\beta^{\mathrm{T}})\cdots(\alpha\beta^{\mathrm{T}})=\alpha(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)\cdots(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)\beta^{\mathrm{T}}$$

$$=\alpha 2^{n-1}\beta^T=2^{n-1}\alpha\beta^T=2^{n-1}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\2 & 2 & -2\\1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

2、对称阵与反对称阵

设方阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$.

若矩阵A 满足 $A^{\mathrm{T}}=A$ ，则称A 为对称矩阵.

直观来看，对称阵的元素关于对角线对称相等.

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ 为对称阵;

若矩阵A满足$A^{\mathrm{T}}=-A$，则称A为反对称矩阵.

反对称阵的元素关于对角线异号;

并且对角线上元素全为零。

例 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 6 \\ -4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$为反对称阵.

例 设列矩阵$X=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)^{\mathrm{T}}$满足$X^{\mathrm{T}}X=1$，$E$为$n$阶单位矩阵，$H=E-2XX^{\mathrm{T}}$，证明$H$是对称阵，且$HH^{\mathrm{T}}=E$.

证明 因为

$$H^{\mathrm{T}}=\left(E-2XX^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=E^{\mathrm{T}}-2\left(XX^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=E-2XX^{\mathrm{T}}=H,$$

所以H是对称阵.

$$HH^{\mathrm{T}}=H^2=\left(E-2XX^{\mathrm{T}}\right)^2=E-4XX^{\mathrm{T}}+4\left(XX^{\mathrm{T}}\right)\left(XX^{\mathrm{T}}\right)$$

$$=E-4XX^{\mathrm{T}}+4XX^{\mathrm{T}}=E.$$

方阵的行列式

定义 由n阶方阵A的元素所构成的行列式（各元素的位置不变），称为方阵A的行列式，记为$\det A$ 或$|A|$.

例 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$， 则 $\det A=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

方阵的行列式满足的运算规律：

（设A、B为n阶方阵，λ为数）

(1) $\left|A^{\mathrm{T}}\right|=|A|$（行列式性质1）；

(2) $|\lambda A|=\lambda^n|A|$；

(3) $|AB|=|A|\cdot|B|$.

$$|AB|=|BA|.$$

设A、B为2阶方阵，

设四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix}=|A|\cdot|B|,$$

$$D=\begin{vmatrix} A & AB \\ -E & O \end{vmatrix}=(-1)^2\begin{vmatrix} -E & O \\ A & AB \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^2|-E|\cdot|AB|=|AB|,$$

定义：由行列式$|A|$的各个元素的代数余子式A_{ij}所构成的矩阵

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵A的伴随矩阵，简称伴随阵.

例　求二阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵.

解　$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=\begin{vmatrix} & \\ & d \end{vmatrix}=d,\ A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-b,$

$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix} & \\ c & \end{vmatrix}=-c,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=a,$

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

课堂练习：

证明　上三角矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$的伴随矩阵

仍为上三角矩阵.

例 设 A 是 n 阶方阵，A^* 是 A 的伴随阵，证明：

$$AA^* = A^*A = |A|E.$$

证明 设 $A=(a_{ij})$，由行列式的按行展开公式易知

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}$$

即 $AA^* = |A|E$. 同理可证 $A^*A = |A|E$.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} |A|, i=j; \\ 0, i \neq j \end{cases}}$$