矩阵的运算

矩阵的加法

数与矩阵相乘

矩阵的线性运算

矩阵与矩阵相乘

矩阵的转置

方阵的行列式

矩阵的加法

同型

定义 设有两个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$，

那么矩阵 A 与 B 的和记作 $A+B$，规定为

注意

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

例　设 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\3&4&5\end{pmatrix}_{2\times3}$，$B=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&1&0\end{pmatrix}_{2\times3}$，

则

$$A+B=\begin{pmatrix}1+3&1-1&2+1\\3+2&4+1&5+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&3\\5&5&5\end{pmatrix}.$$

矩阵的加法运算具有性质：

(1)交换律：$A+B=B+A$.

(2)结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$.

(3)对任意矩阵 A：$A+O=O+A=A$.

数与矩阵相乘

设矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，$k$为一个数，

定义数 k 与矩阵 A 的乘法为：

$$kA=\left(ka_{ij}\right).$$

例：设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$， 则 $2A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

数与矩阵的乘法具有如下性质：

(1)对任意矩阵$A_{m\times n}$，有$1\cdot A_{m\times n}=A_{m\times n}$；

(2)对任意矩阵$A_{m\times n}$、$B_{m\times n}$以及任意数k、l，有

$$(k+l)A=kA+lA,\qquad k(A+B)=kA+kB$$

(3)对任意矩阵$A_{m\times n}$以及任意数k、l，有

$$(kl)A_{m\times n}=k(lA_{m\times n})=l(kA_{m\times n})$$

对矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，定义其负矩阵为

$$-A=(-1)\cdot A=\left(-a_{ij}\right).$$

定义两个同型矩阵的减法为：

$$A-B=A+\left(-B\right)=\left(a_{ij}-b_{ij}\right).$$

例：设 $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 9 & 11\\ 8 & 10 & 12\end{pmatrix}$,

则 $A-B=\begin{pmatrix}-6 & -6 & -6\\ -6 & -6 & -6\end{pmatrix}$.

矩阵与矩阵相乘

1、矩阵乘法的定义

设矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times \underline{n}}$，$B=\left(b_{ij}\right)_{\underline{n}\times p}$，定义矩阵

$$C=\left(c_{ij}\right)_{m\times p},$$

其中 $c_{ij}=\underbrace{a_{i1}}\underbrace{b_{1j}}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}.$

称矩阵C 称为矩阵A与B的乘积，记为$C=AB.$

$$C=A\times B.$$

例 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3}$，

则由矩阵乘法定义

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2+2+3 & 2+1+2 & -2+3+2 \\ 1+4+3 & 1+2+2 & -1+6+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}_{2\times 3}.$$

注 1：矩阵乘法不满足交换律！

例：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 7\\ 1 & 2 & 7\end{pmatrix}$，　　但 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ 无意义！

例 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

虽然$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$都有意义，但$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$．

例 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$，

$$A\times B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad B\times A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix},\quad A\times B\neq B\times A.$$

注 2：两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵！

由 $AB=O$ 推不出 $A=O$ 或 $B=O$.

注 3：矩阵乘法不满足消去律！

例：$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$、$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$、$C=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 3 & 5\end{pmatrix}$

易知 $AB=AC=O$，且 $A\neq O$，但 $B\neq C$.

所以 $AB=AC \not\Rightarrow B=C$.

2. 矩阵乘法的性质

(1)分配律： 左分配律：$A(B+C)=AB+AC$，

右分配律：$(B+C)A=BA+CA$；

(2)结合律： $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$；

(3)对任意矩阵$A_{m\times n}$： $E_{m\times m}A_{m\times n}=A$，

$A_{m\times n}E_{n\times n}=A$.

设 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 为方阵，根据结合律，我们定义：

$$\begin{cases} A^n = A^{n-1}\cdot A & (n>0), \\ A^0 = E, & (A\neq 0). \end{cases}$$

满足：$A^l A^k = A^{l+k}$，$(A^k)^l = A^{kl}$ $(k>0,\ l>0)$.

注意:$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$.

一般来说，$(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$.

设 $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$， $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 为方阵，

则定义矩阵多项式：

$$f(A)=a_n A^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1 A+a_0 E.$$

例 $f(x)=2x^2-x+3$， $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

$3=3x^0$

则 $f(A)=2A^2-A+3E=2\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}6&3\\3&6\end{pmatrix}.$$

例：已知方阵A的各行元素之和都为常数 a ，

求证：方阵 A^m 的各行元素之和也为一个常数，

并求此常数

证明：令

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \beta=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} \\ a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = a\beta.$$

由矩阵乘法结合律，

$$A^m\beta = A^{m-1}(A\beta) = aA^{m-1}\beta = \cdots = a^m\beta.$$

所以方阵A^m的各行元素之和都是常数a^m.

3. 方程组的矩阵形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ 未知量列向量

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ 常数项列向量

$$Ax = b$$