线性方程组和矩阵

线性方程组

矩阵的定义

线性方程组

设有n个未知数m个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \cdots\cdots\cdots(1)$$

常数项

其中a_{ij}表示第i个方程中第j个未知量x_j的系数，

$i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n.$

当$b_1, b_2, \cdots, b_m$不全为零时，称为非齐次线性方程组.

当常数项全为零，即$b_1=b_2=\cdots=b_m=0$时，方程组成为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0. \end{cases} \quad \cdots\cdots(2)$$

称为齐次线性方程组.

n元线性方程组简称为线性方程组或方程组.

对于线性方程组，需要讨论如下问题：

(1) 方程组是否有解？

(2) 在方程组有解时，解是否惟一？

(3)如果有多个解，如何求出它的所有解？

南北朝的《孙子算经》：“鸡兔同笼”问题：

“今有雉兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问雉兔各几何？”

设鸡有x只，兔有y只，根据题意，得：

$$\begin{cases} x+y=35 & (1) \\ 2x+4y=94 & (2) \end{cases}$$

$(2)-(1)\times 2$：$2y=24$ 所以 $y=12, x=23$

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

解的情况完全由其系数 $a_{ij}\,(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 和常数项 $b_i\,(i=1,2,\cdots,m)$ 决定.

$$
\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1, \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{pmatrix}
$$

该数表就表示方程组

矩阵的定义

定义　由 $m\times n$ 个数 a_{ij} 构成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵，　数 a_{ij}

矩阵的(i,j)元

第i行

第j列

矩阵常用大写英文字母表示，如 A、B、C 等.

记为：$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

有时也记为 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$

构成矩阵的元素

表明矩阵的阶数

根据矩阵的元素所属的数域，可以将矩阵分为：

复矩阵：由复数构成的矩阵．例如：$\begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ -i & 2 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

实矩阵：由实数构成的矩阵．例如：$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$

几类特殊矩阵：

1、零矩阵：

如果矩阵中的每一个元素均为零，则该矩阵称为零矩阵，记为：

$$\boldsymbol{O}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

零矩阵通常简记为$\boldsymbol{O}$.

2. 行矩阵与列矩阵

行数为 1 的矩阵：

$$(a_1,\quad a_2,\quad \cdots,\quad a_m)$$

称为行矩阵，

也称为m维行向量；

列数为1的矩阵：

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

称为列矩阵，

也称n 维列向量.

3. 方阵：行数和列数相等的矩阵

例：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

为一个 n 阶方阵.

在方阵中还有几个特殊形式的矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

——上三角阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}_{m\times m}$$

——下三角阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n}$$

——对角阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

——单位阵，记为E_n

对角阵：既是上三角，也是下三角矩阵

矩阵相等的概念：

如果两个矩阵行数相等、列数也相等时，称这两个矩阵是同型矩阵.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)$ 与 $\boldsymbol{B}=\left(b_{ij}\right)$ 是同型矩阵，并且它们对应的元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}\left(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\right)$$

则称矩阵A与B矩阵相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

对于非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

方程组的系数矩阵

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ 方程组的增广矩阵

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ 未知数矩阵 $$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ 常数项矩阵

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}}$$

变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases} \longleftrightarrow A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$$

从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的线性变换.

从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的恒等变换.

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ \quad \cdots\cdots \\ y_n = x_n \end{cases} \longleftrightarrow \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$