行列式按行(列)展开

行列式的展开定理

展开定理的应用

行列式的展开定理

定义　在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列元素划去，留下来的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式

记为：M_{ij}

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_n$$

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n-1}$$

注： 元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 与元素 a_{ij} 以及第 i 行、第 j 列元素取什么值无关！ M_{ij} 只取决于元素 a_{ij} 所在的位置

例：在行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & a & 6 \\ 4 & x & 8 \end{vmatrix}$ 中，元素 x 位于第3行、第2列

元素 x 的余子式为： $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -9$

同理，元素 3 的余子式为： $M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ x & 8 \end{vmatrix} = 16 - 5x$

定义 n 阶行列式中，元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 定义为

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

注： 元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 仍然与元素 a_{ij} 以及第 i 行、第 j 列元素取值无关！ A_{ij} 只取决于元素 a_{ij} 所在的位置

例：在行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & a & 6 \\ 4 & x & 8 \end{vmatrix}$ 中，元素 x 位于第3行、第2列

元素 x 的代数余子式为： $A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=9$

引理：在 n 阶行列式 D 中，若第 i 行元素除 a_{ij} 外，其余元素都为零，则 $D=a_{ij}A_{ij}$

即：
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{ij}A_{ij}$$

$$\begin{vmatrix} a_{1m} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

证明：先看一个特殊情况：$(i,$ $1,1)$。。此时，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}M_{11}=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}=a_{11}A_{11}$$

一般情况

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j-2} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}$$

利用行列式的性质，将第 i 行 依次与其前面的各行对换；

再将第 j 列依次与其前面的各列对换，于是元素 a_{ij}

换到最左上角的位置，即位于第1行、第1列。

总共经过了i+j-2次对换，于是

所以 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{ij}A_{ij}$

定理：任意选定行列式的某一行（比如第 i 行），则行列式等于该行元素与其对应代数余子式乘积之和

即：$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} i \quad =a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$

证明：利用行列式的分拆定理以及刚证明的引理，得：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+0+\cdots+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

展开定理的应用

行列式按行（列）的展开定理，将 n 阶行列式的计算，归结为低一阶的 n-1 阶行列式的计算

在应用时，通常是利用行列式的性质，让某一行（列）出现尽量多的零，再按该行（列）展开

例7（续） 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

解：

$$D \overset{c_3+c_4;-2c_3+c_1}{=\!=\!=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \overset{r_1+r_2}{=} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{-c_2+c_1}{=} \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 40$$

推论：行列式某一行（列）的元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和为零

证明：用行列式 D 的第i行替换第j行，得到行列式

$$D_j = \begin{array}{c|cccc|c} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & i \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & j \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \end{array}$$

第i行、第j行相同，行列式值为零；

另一方面，行列式 D_j 与 D 除第j行元素外完全相同，所以它们第j行元素的代数余子式也完全相同

将 行列式 D_j 按第j行展开，得

$$D_j = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$$

综合定理和推论，我们得到：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D, i = j; \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} D, i = j; \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

例13：设 $D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$，求 $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}$

以及 $M_{11} + M_{21} + A_{31} + M_{41}$

其中 $M_{ij}(\mathrm{A}_{ij})$ 表示元素 a_{ij} 的（代数）余子式

位于第1行、第3列

解：$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{-r_1+r_3;r_1+r_4}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&-5\\-2&2&0&2\\3&-3&0&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-5\\-2&2&2\\3&-3&-2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2+c_1}\begin{vmatrix}2&1&-5\\0&2&2\\0&-3&-2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&2\\-3&-2\end{vmatrix}=4$$

$$M_{11}+M_{21}+M_{31}+M_{41}=A_{11}-A_{21}+A_{31}-A_{41}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0 & -5\\ 1 & 3 & 1 & 3\\ -1 & -4 & -1 & -3\end{vmatrix} \overset{r_3+r_4}{=} \begin{vmatrix}1 & -5 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0 & -5\\ 1 & 3 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & -5\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}$$

$$\overset{r_1+r_2;-r_1+r_3}{=\!=\!=\!=\!=\!=} -\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix} = 0$$