行列式的性质

行列式的性质

行列式的计算

行列式的计算

利用行列式下面性质，可以简化行列式运算，将行列式归结为三角行列式的计算

1、交换行列式的两列，行列式变号；

2、某一列的公因子可以提到行列式外面；

3、某列的倍数加到另一列，行列式值不变；

4、行列式的分拆定理对列也成立.

例6：计算： (1) $D=\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \therefore & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \therefore & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$

解：(1)

把第n行依次与第$n-1, n-2, \cdots, 3, 2, 1$行对换(共作了$n-1$次对换),

得到行列式D_1. 由性质2, $D=(-1)^{n-1}D_1$, $D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$

再把D_1的第n行依次与第$n-1, n-2, \cdots, 3, 2$行对换(共作了$n-2$次对换),

依此进行下去，可得 $D=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1}\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & a_{1n} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$

(2) 作为(1)的特例，可得原行列式的值为 $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

将第1行的5倍加于第2行

例7：计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$

交换第1、4行

解：

$$D\overset{r_1\leftrightarrow r_4}{=\!=}-\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\3&1&-1&2\end{vmatrix}\overset{5r_1+r_2}{=\!=}-\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&-24&18&-19\\2&0&1&-1\\3&1&-1&2\end{vmatrix}\overset{-2r_1+r_3}{=\!=}-\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&-24&18&-19\\0&10&-5&5\\3&1&-1&2\end{vmatrix}$$

第3行提出公因数5

$$\overset{-3r_1+r_4}{=\!=}-\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&-24&18&-19\\0&10&-5&5\\0&16&-10&11\end{vmatrix}\overset{\frac{1}{5}r_3}{=\!=}-5\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&-24&18&-19\\0&2&-1&1\\0&16&-10&11\end{vmatrix}\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{=\!=}5\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&2&-1&1\\0&-24&18&-19\\0&16&-10&11\end{vmatrix}\overset{12r_1+r_3}{=\!=}5\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&2&-1&1\\0&0&6&-7\\0&16&-10&11\end{vmatrix}$$

$$\overset{-8r_1+r_4}{=\!=}5\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&2&-1&1\\0&0&6&-7\\0&0&-2&3\end{vmatrix}\overset{r_3\leftrightarrow r_4}{=\!=}-5\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&2&-1&1\\0&0&-2&3\\0&0&6&-7\end{vmatrix}\overset{3r_3+r_4}{=\!=}-5\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&2&-1&1\\0&0&-2&3\\0&0&0&2\end{vmatrix}=40$$

例8：计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$

每列元素之和都是6

第2、3、4行都加于第1行

解： $D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&6&6&6\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$

第1行提取公因数6

$$=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48$$

第1行的-1倍分别加于2、3、4行

例9：计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$

第1行的-1倍分别加于第2、3、4行

解： $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 0 & 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 3a & 7a+3b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4$$

第2行的-2倍、 -3倍分别加于第3、4行

第3行的 -3倍加于第4行

例9：计算行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

$-b$、$-c$、$-d$ 加于第2、3、4列

第2列分别乘以 $-(a+b)$、$-(a+b+c)$ 加于第3、4列

解：

$$D=a\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ 1 & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ 1 & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & a+b & a+b+c \\ 1 & 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 1 & 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix}$$

第3列乘以 $-(2a+b)$ 加于第4列

$$=a^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a+b & a+b+c \\ 1 & 2 & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 1 & 3 & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix}=a^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a & 2a+b \\ 1 & 3 & 3a & 7a+3b \end{vmatrix}$$

$$=a^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2a+b \\ 1 & 3 & 3 & 7a+3b \end{vmatrix}=a^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & a \end{vmatrix}=a^4$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & b \end{vmatrix} = ab$$

例10：证明：

$$D = D_1 \cdot D_2$$

$$\begin{vmatrix} a_{1m} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

证：对 D_1 运用性质 $kr_i + r_j$，化为下三角

$$D_1 = \begin{vmatrix} p_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ p_{m1} & \cdots & p_{mm} \end{vmatrix} = p_{11}p_{22}\cdots p_{mm}$$

对 D_2 运用性质 $kc_i + c_j$， 化为下三角

$$D_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix} = q_{11}q_{22}\cdots q_{nn}$$

对 D 的前 m 行运用 $kr_i + r_j$，对 D 的后 n 列运用 $kc_i + c_j$，

把 D 化为下三角

$$D = \begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & 0 & \\ p_{m1} & \cdots & p_{mm} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1m} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix} = p_{11}\cdots p_{mm} \cdot q_{11}\cdots q_{nn} = D_1 D_2$$

例11：计算：$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}$，其中未写出的元素全为零

解：第$2n$行依次与第$2n-1,2n-2,\cdots,3,2$行对换(共作了次$2n$-2相邻对换)

第$2n$列依次与第$2n-1,2n-2,\cdots,3,2$列对换(共作了$2n-2$次相邻对换)

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & c & d & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & c & & & & & d & \\ c & & & & & & & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & & & & & 0 & b \\ c & 0 & & & & & 0 & d \\ & & a & & & b & & \\ & & & \ddots & \iddots & & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & c & d & & & \\ & & & \iddots & \ddots & & & \\ & & c & & & d & & \\ 0 & c & & & & & d & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & & & & & \\ c & d & & & & & \\ & & a & & & & b \\ & & & \ddots & & \iddots & \\ & & & a & b & & \\ & & & c & d & & \\ & & & \iddots & & \ddots & \\ & & c & & & & d \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}D_{2(n-1)}=(ad-bc)D_{2(n-1)}=(ad-bc)^2D_{2(n-2)}=\cdots=(ad-bc)^{n-1}D_2=(ad-bc)^n$$

例11：计算：$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}$，其中未写出的元素全为零

第1行乘以 $-\dfrac{c}{a}$
加于第2n行

第n行乘以$-\dfrac{c}{a}$
加于第n+1行

解：若$a=0$，$D_{2n}=\begin{vmatrix} & & & & & b \\ & & & & \iddots & \\ & & & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}$ $(-1)^{\tau(2n,2n-1,3,2,1)}(bc)^n$

$=(-1)^{(2n-1)+\cdots+2+1}(bc)^n=(-1)^{n(2n-1)}(bc)^n=(-1)^{2n^2-2n+n}(bc)^n=(-1)^n(bc)^n=(-bc)^n=(ad-bc)^n$

若$a\neq 0$，$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & 0 & d-\dfrac{bc}{a} & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ 0 & & & & & d-\dfrac{bc}{a} \end{vmatrix}=a^n\left(d-\dfrac{bc}{a}\right)^n$

$=(ad-bc)^n$

所以 $D_{2n}=(ad-bc)^n$