行列式的性质

行列式的性质

行列式的计算

行列式的性质

按照定义，5阶行列式是5!=120项的代数和，

根据定义计算高阶行列式相当繁琐！

本节给出行列式的几个性质，利用这些性质

可将行列式的计算归结为三角行列式的计算

称为D的转置行列式T=transpose

性质1 行列式的行、列互变，值不变！

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D^T$$

$$D=\sum_{j_1 j_2\cdots j_n\in P_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad D^T=\sum_{i_1 i_2\cdots i_n\in P_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}$$

行下标排成自然排列 $12\cdots n$
列下标排 $j_1 j_2\cdots j_n$ 决定该项符号

列下标排成自然排列 $12\cdots n$
行下标 $i_1 i_2\cdots i_n$ 决定该项符号

只需证：

(1) D 中每一项连同符号都与 D^T 中的项相等；

(2) D 中不同的项等于 D^T 中不同的项

$\Rightarrow D=D^T$

例：三阶行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1 j_2 j_3 \in P_3}(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} a_{3 j_3}$$

元素乘法满足交换律，调整乘积次序，使列指标排成自然顺序

$\because \tau(123)=0$

比如：

$$(-1)^{\tau(321)} a_{13} a_{22} a_{31} = (-1)^{\tau(123)+\tau(321)} a_{13} a_{22} a_{31}$$

$\because \tau(123)=0 \ \therefore \ \tau(321)=\tau(123)+\tau(321)$

交换位置

$$=(-1)^{\tau(321)+\tau(123)} a_{31} a_{22} a_{13}$$

$$a_{13} a_{22} a_{31}=a_{31} a_{22} a_{13}$$

$$=(-1)^{\tau(321)} a_{31} a_{22} a_{13}$$

行、列下标排列经同一个对换变为新的行、列下标排列

$$(123) \xrightarrow{\sigma_{13}} (321)$$

$$(321) \xrightarrow{\sigma_{13}} (123)$$

$$D^T=\sum_{i_1 i_2 i_3 \in P_3}(-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} a_{i_3 3}$$

$\tau(123)+\tau(321)$与

$\tau(321)+\tau(123)$ 同奇、偶

再如： $\boxed{(-1)^{\tau(312)}a_{13}a_{21}a_{32}} = (-1)^{\tau(123)+\tau(312)}a_{13}a_{21}a_{32}$

交换位置

$\because\ \tau(123)=0$

$=(-1)^{\tau(213)+\tau(132)}a_{21}a_{13}a_{32}$

交换位置

$=(-1)^{\tau(231)+\tau(123)}a_{21}a_{32}a_{13} = \boxed{(-1)^{\tau(231)}a_{21}a_{32}a_{13}}$

D中的 $(-1)^{\tau(312)}a_{13}a_{21}a_{32}$ 与 D^T 中的 $(-1)^{\tau(231)}a_{21}a_{32}a_{13}$ 相等

故 D中的每一项都等于 D^T 中相应的项，且不同的项对应到不同的项

所以对三阶行列式，有 $D=D^T$ 成立

同理可以证明：$D=D^T$对任意阶行列式都成立

这个定理的意义在于，它说明在行列式中

行与列完全对等，具有同样重要的地位

关于行成立的性质，对列也同样成立。

性质2：交换行列式的两行（列），行列式变号

第s行

第t行

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -D_1$$

第s行

第t行

证：

$$(j_1 j_2 \cdots j_t \cdots j_s \cdots j_n) \qquad = a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{nj_n}$$

一次对换

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n \in P_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{nj_n}$$

$$= -\sum_{j_1 j_2 \cdots j_t \cdots j_s \cdots j_n \in P_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_t \cdots j_s \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{nj_n} = -D_1$$

推论：若行列式有两行（列）完全相同，则行列式等于零

证：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ s \\ \\ t \\ \\ \\ \end{matrix} \overset{r_s \leftrightarrow r_t}{=} -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ s \\ \\ t \\ \\ \\ \end{matrix} = -D$$

$\therefore D=-D$　　　　$\therefore D=0$

性质3 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

在 $n!$ 项的代数和中，每一项都有公因数 k

若行列式的某一行(列)有公因子 k, k 可以提到行列式前面.

用 k 乘行列式，等于用 k 乘行列式的某一行（列）.

证： 由行列式定义，

$$\text{左边} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n \in P_n} \underline{(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots (k a_{i j_i}) \cdots a_{n j_n}}$$

$$= k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n \in P_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{i j_i} \cdots a_{n j_n} = \text{右边}$$

例 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 12 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

第二行有公因数2

第三行有公因数3

$2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 10 \end{vmatrix}$

推论：若行列式 D_n 的某一行（列）元素全为零，则 $D_n = 0$.

证：只要在性质 3 中，令 $k = 0$ 即可.

性质4　若行列式有两行（列）成比例，则行列式等于零

证：$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ kb_1 & kb_2 & \cdots & kb_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ s \\ \\ t \\ \\ \\ \end{matrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ s \\ \\ t \\ \\ \\ \end{matrix} = 0$

性质5：　行列式的分拆定理

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

只是第 i 行不同，并且左边行列式第 i行是右边两个行列式第 i 行对应元素之和

证：

$$左边 = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n \in P_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (b_{ij_i} + c_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}$$

利用分配律

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n \in P_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n \in P_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots c_{ij_i} \cdots a_{nj_n} = 右边$$

性质6：行列式某行（列）的倍数加到另一行（列），值不变

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1}+ka_{s1} & a_{t2}+ka_{s2} & \cdots & a_{tn}+ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$k \times r_s + r_t$

证：

$$\text{左边} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \text{右边}$$

分拆定理

两行成比例