



# $n$ 阶行列式的定义

$n$  阶行列式的定义

几个特殊行列式的计算



# $n$ 阶行列式的定义

为了给出  $n$  阶行列式定义，先来看三阶行列式的结构和特点。

根据定义，3 阶行列式展开式中的每一项都是取自不同行、不同列的三个元素之积；

通过交换乘积因子的次序，每一项都可写为形如  $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$

的形式，即行指标排成自然排列 1, 2, 3，列指标的排列  $j_1 j_2 j_3$

是 1, 2, 3 的某个排列，这样的排列共有  $6 = 3!$  种，恰好对应展

开式中的 6 项；

每一项  $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$  前的正负号由列指标排列  $j_1j_2j_3$  的奇偶性

确定，当  $j_1j_2j_3$  是奇排列时，带负号，当  $j_1j_2j_3$  是偶排列时，

带正号。

总之，三阶行列式可以写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3 \in P_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

定义： $n$ 阶行列式是由  $n^2$  个数  $a_{ij}$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ ) 排成的一个  $n$  行、 $n$  列的正方形数表

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

该数表表示一个数，称为由  $n^2$  个数  $a_{ij}$  构成的  $n$  阶行列式

记为

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

*Determinant*  
下标  $n$  表示阶数

$a_{ij}$  的下角标  
表示元素的位置，  
如  $a_{2n}$  表明它  
位于第2行第  $n$  列

$n$  阶行列式  $D_n$  按下面规则确定

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n \in P_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

其中  $\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n \in P_n}$  表示对  $1, 2, \dots, n$  所有的排列求和

式，等号右边的和式称为行列式的展开式



行列式的展开式有如下三个特点

1、对所有的排列求和，展开式是 $n!$ 项的代数和；

2、每一项 $a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$ 行指标依自然顺序排列，

而列指标 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 也够成一个排列，所以每一项

的 $n$ 个元素取自不同行和不同列；

3、当行指标成自然排列时， $a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$  的列指

标  $i_1, i_2, \cdots, i_n$  所成排列的奇偶性决定该项正负号。

例、 $a_{32} a_{24} a_{33} a_{41}$  的行指标 3, 2, 3, 4 不构成排列，即

有两个元素取自第三行， $a_{32} a_{24} a_{33} a_{41}$  不是四阶行

列式展开式中的项。

例、 $a_{12}a_{24}a_{43}a_{31}$  的行指标和列指标分别构成排列

1, 2, 4, 3 和 2, 4, 3, 1, 所以  $a_{12}a_{24}a_{43}a_{31}$  出现在四阶行

列式展开式中； 因  $a_{12}a_{24}a_{43}a_{31} = a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$  ,

列指标 2, 4, 1, 3 的逆序数  $\tau(2, 4, 1, 3) = 3$  ,  $a_{12}a_{24}a_{43}a_{31}$

前面的符号为负.



# 几个特殊行列式

按照定义，5阶行列式是 $5!=120$ 项的代数和，  
根据定义计算高阶行列式相当繁琐！

下面根据行列式定义，给出几个特殊行列式的  
计算公式，这也是后面计算行列式的重要  
根据。

# 例、下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n \in P_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

(n-1)! 项

$$= \sum_{i_2 \cdots i_n \in P_n} (-1)^{\tau(1i_2 \cdots i_n)} a_{11} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

(n-2)! 项

$$= \sum_{i_2 \cdots i_n \in P_n} (-1)^{\tau(12 \cdots i_n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{ni_n} = \cdots$$

$$= (-1)^{\tau(12 \cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

n! 项

# 例、上三角行列式

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & \cancel{a_{12}} & \cdots & \cancel{a_{1,n-1}} & \cancel{a_{1n}} \\
 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & \cancel{a_{n-1,n}} \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}
 \end{vmatrix}$$

n! 项

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n \in P_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1} n \in P_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_{n-1} n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{n-1, i_{n-1}} a_{nn}$$

(n-1)! 项

$$= \sum_{i_1, \cdots, n-1, n \in P_n} (-1)^{\tau(i_1, \cdots, n-1, n)} a_{1i_1} \cdots a_{n-1, n-1} a_{nn} = \cdots$$

$$= (-1)^{\tau(12 \cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

(n-2)! 项

## 例、对角行列

作为特例，对角行列式既是上三角，也是下三角行列式，所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$