全排列与对换

排列及其逆序数

对换及其性质

排列及其逆序数

定义：由正整数$1, 2, \cdots, n$按一定次序排成一列，叫这n个元素的一个全排列（简称排列）.

不重：不能有重复的元素；

不漏：不能有遗漏的元素.

例：1, 2, 3; 1, 3, 2; 2, 1, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2; 3, 2, 1

都是1, 2, 3 的排列，一共有 $6=3\times2\times1=3!$ 个.

设 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是1, 2, $\cdots$, n 的一个排列，则由定义知

$i_k \in \{1, 2, \cdots, n\}\ (k=1,2,\cdots,n)$ 并且 $i_k \neq i_l\,(k \neq l)$.

i_1可以取$1, 2, \cdots, n$中的任意一个数，有n种取法；

i_2可以取$1, 2, \cdots, n$中任意一个除i_1的数，共有$n-1$种取法；……，所以我们有：

命题：$1, 2, \cdots, n$的排列总共有$n \times \cdots 2 \times 1 = n!$个不同的排列

定义：在排列$i_1,i_2,\cdots,i_k,\cdots i_l,\cdots,i_n\ (k<l)$中，如果$i_k>i_l$，则称$(i_k,i_l)$为该排列的一个“逆序对”，一个排列中逆序对的个数，称为该排列的“逆序数”．

我们用$\tau(i_1,i_2,\cdots i_n)$表示排列$i_1,i_2,\cdots i_n$的逆序数.

例：排列$3,1,2$中，$(3,1),(3,2)$是仅有的两个逆序对，

所以排列$3,1,2$的逆序数为2，即$\tau(3,1,2)=2$.

记$\tau(i_k)$为$i_1,i_2,\cdots,i_k,\cdots,i_n$中位于$i_k$后面但比$i_k$小的

元素的个数，则$\tau(i_1,i_2,\cdots i_n)=\tau(i_1)+\tau(i_2)+\cdots+\tau(i_n)$.

例： $\tau(5,2,4,3,1)=\tau(5)+\tau(2)+\tau(4)+\tau(3)+\tau(1)$

$=4+1+2+1+0=8$.

例： $\tau(1,2,3)=0$; $\tau(1,3,2)=1$; $\tau(2,1,3)=1$;

$\tau(2,3,1)=2$; $\tau(3,1,2)=2$; $\tau(3,2,1)=3$.

定义：逆序数为偶（奇）数的排列，称为偶（奇）排列.

在$1,2,3$所有的$3\times2\times1=6$个排列中，偶排列和奇排列均为3个，各占总数的一半.

命题：在$1,2,\cdots,n$所有的$n!$个排列中，偶排列和奇排列均为$\frac{n!}{2}$个，各占总数$n!$的一半.

对换及其性质

定义：在排列中将任意两个元素对调，其余元素保持不动，这种得到新排列的手续叫对换.将相邻两个元素对换，叫相邻对换.

例如：将排列 $4,3,2,1$ 中的元素 2，4对换，得到新排列 $2,3,4,1$.

$\tau(4,3,2,1)=6, \tau(2,3,4,1)=3$，对换改变排列的奇偶性.

定理 1：一个排列中任意两个元素对调，排列改变奇偶性.

证 先考虑相邻对换的情形.

设排列 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m$ 经对换 a,b 变为新排列

$a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m$，根据定义，逆序数的变化情况为：

当 $a < b$ 时，新排列逆序数增加1；当 $a > b$ 时，新排列逆序数减少1；总之，新老排列奇偶性不同.

一般对换的情形.

设排列 $a_1\cdots a_l a b_1\cdots b_m b c_1\cdots c_n$ 经过 m 次相邻对换变为 $a_1\cdots a_l b_1\cdots b_m a b c_1\cdots c_n$，再经过 $m+1$ 次相邻对换变为 $a_1\cdots a_l b b_1\cdots b_m a c_1\cdots c_n$，经过 $2m+1$ 次相邻对换排列 $a_1\cdots a_l a b_1\cdots b_m b c_1\cdots c_n$ 变为 $a_1\cdots a_l b b_1\cdots b_m a c_1\cdots c_n$，其奇偶性不同.

推论 1：奇排列对换成自然排列$1,2,\cdots,n$的对换次数为奇数；偶排列对换成自然排列的对换次数为偶数.

证：因为奇排列的逆序数为奇数，而自然排列$1,2,\cdots,n$的逆序数为零，由定理，进行一次对换改变一次奇偶性，所以奇排列对换成自然排列的对换次数为奇数.

推论 2：在$1,2,\cdots,n$所有的排列中，奇偶排列各占一半.

证：记偶排列集合为 E，奇排列集合为O，则$E\cap O=\varnothing$,

所以偶排列的个数$|E|$与奇排列的个数$|O|$之和为$n!$

取定对换σ，则$\sigma(E)\subseteq O$, $\sigma(O)\subseteq E$，从而 $|E|\leq|O|$,

$|O|\leq|E|$，故$|O|=|E|=\dfrac{1}{2}n!$.