二阶与三阶行列式

二元线性方程组与二阶行列式

三阶行列式

二元线性方程组
与二阶行列式

用消元法解线性方程组：$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \cdots\cdots(1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \cdots\cdots(2) \end{cases}$

消去未知数 x_2：$(1)\times a_{22} - (2)\times a_{12}$ 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

同理消去 x_1 得：$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得方程组的解为：

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

在方程组解的表达式中，分子、分母都是四个数分两对乘积再作差得到，其中分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 由方程组中未知量系数确定.

把四个系数按照它们在方程组中的相对位置，排成二行二列（横排叫行，竖排叫列）的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为该数表确定的二阶行列式，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

数 $a_{ij}(i=1,2; j=1,2)$ 称为行列式的元素

a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行；

第二个下表 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列.

二阶行列式遵从对角线法则.

从 a_{11} 到 a_{22} 的实连线，称为主对角线；

从 a_{12} 到 a_{21} 的虚连线，称为副对角线；

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

副对角线-

主对角线+

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

利用二阶行列式的概念，方程组得解可以重新表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D},$$

其中 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为系数行列式，

$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ 是用常数项 b_1, b_2 替代第一列元素 a_{11}, a_{21} 所得行列式，

$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ 是用常数项 b_1, b_2 替代第二列元素 a_{12}, a_{22} 所得行列式.

例 1 求解二元线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$

解：由于 $$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-(-4) = 7 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12-(-2) = 14, D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-24 = -21,$$

因此 $$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{7} = -3$$

三阶行列式

定义1　由9个数排成3行3列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

确定的数 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为三阶行列式，它是6项的代数和，

每一项都是取自不同行、不同列的三个元素之积并冠以正负号

三阶行列式的计算遵从对角线法则：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

副对角线－

主对角线+

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

例 2 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

解：按对角线法则，有

$$\begin{aligned} D &= 1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4 \\ &\quad -1\times1\times4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times2\times(-3) \\ &= -4-6+32-4-8-24 \\ &= -14 \end{aligned}$$

例 3 求解方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$

解：方程左端的三阶行列式

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 9x - 2x^2 - 12 = x^2 - 5x + 6$$

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 解得 $x = 2$ 或 $x = 3$