课程简介

线性代数的主要内容

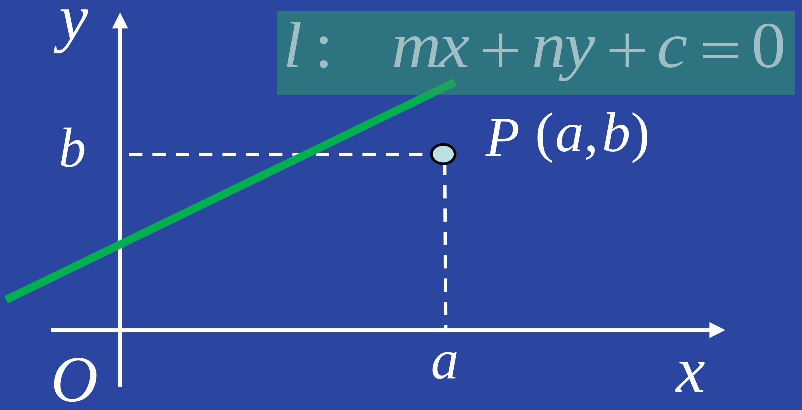
线性代数的作用与地位

线性代数的主要内容

线性代数是高维的空间解析几何. 下面通过中学熟悉的平面解析几何，引入本课程的主要研究内容.

平面解析几何是以代数为工具，研究平面几何的一门课程. 首先通过建立平面直角坐标系，将平面上的几何对象代数化.

在点 P 与有序数组 (a,b)（即点 P 的坐标）间建立了一一对应



在直线 l 与二元一次方程 $mx+ny+c=0$ 间建立了一一对应

平面上两条直线位置关系的几何问题，转化为由两个二元一次方程构成的二元线性方程组解的问题：

两直线平行当且仅当对应的线性方程组无解；

两直线相交当且仅当对应的线性方程组有唯一解；

两直线重合当且仅当对应的线性方程组有无穷多解.

在空间解析几何中，通过建立空间直角坐标系，将空间的点与三元数组建立一一对应；

将空间中的平面与三元一次方程建立一一对应关系；

空间中平面的位置关系，就可以通过研究三元一次方程组解的情况来确定.

一次方程，也称为线性方程. 线性代数的一个主要研究内容就是**线性方程组**.

我们先研究平面，然后研究空间，如果再做进一步推广，就是研究n维向量空间，也称为线性空间.

线性空间是本课程的又一重要研究内容. 所谓推广，就是说平面和空间都是n维向量空间的特例，2维向量空间就是平面，而3维向量空间就是空间解析几何的空间.

在研究平面和空间解析几何时，我们是通过建立直角坐标系，将几何对象代数化.

在研究n维向量空间时，我们同样需要建立“坐标系”将几何对象代数化，此时的“坐标系”称为向量空间的基.

在平面和空间的情形，我们建立的是直角坐标系. 如果我们只要求将几何的点（向量）与代数的数组建立一一对应，我们未必需要一定要建立直角坐标系.

实际上，我们只需建立仿射坐标系即可.

在平面上，只需有两个不共线的向量$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$，依向量分解定理，任意一个向量$\vec{a}$均可以唯一分解为$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$的线性组合，即存在唯一一组数$(x,y)$使得$\vec{a}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$，$(x,y)$就称为向量$\vec{a}$在仿射坐标系$[O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}]$下的坐标.

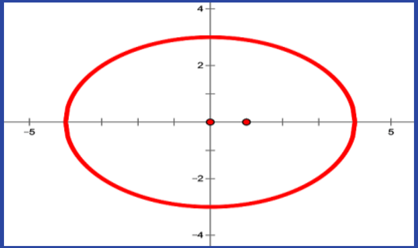
在仿射坐标系$[O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}]$中，我们并没有要求基向量$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}$互相垂直，也没有要求他们都是单位向量，只要求他们不共线就够了.

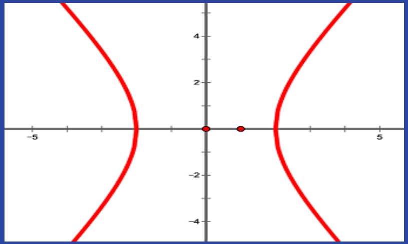
同样，在建立空间仿射坐标系$[O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}]$时，我们也只需要基向量$\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$不共面即可.

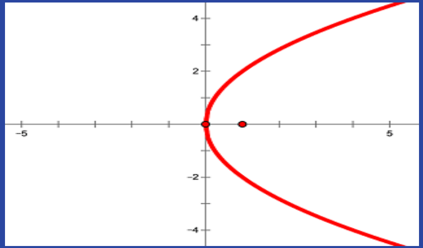
在研究n维向量空间时，我们需要建立仿射坐标系。那么平面上两个向量不共线、空间中三个向量不共面，如何推广到n维向量空间的向量呢？

这就是线性无关的概念．**向量的线性相关性**是我们又一主要研究内容，目的是在n维向量空间中建立仿射坐标系．

平面解析几何的一个重要内容是研究圆锥曲面，或称为二次曲线. 非退化的圆锥曲线包括椭圆、双曲线和抛物线.



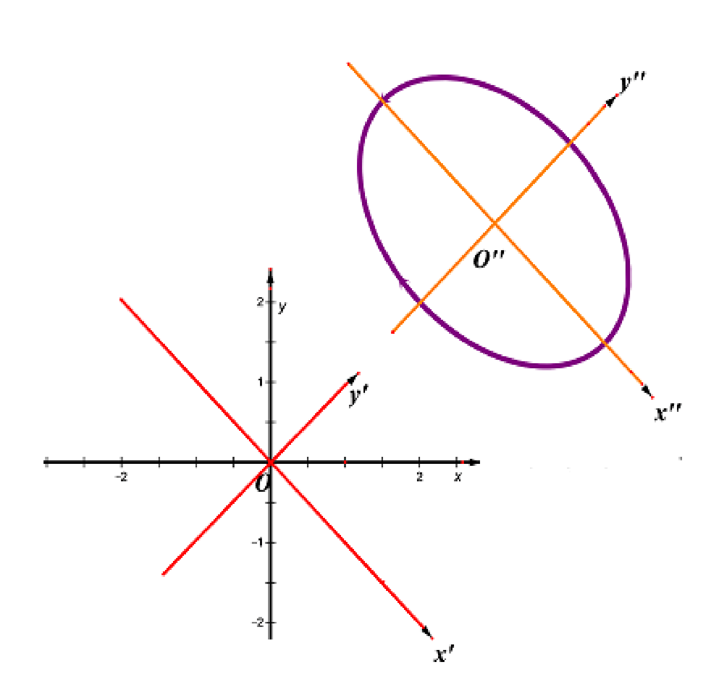




中学我们主要研究圆锥曲线的标准方程. 如果平面直角坐标系选取的好，圆锥曲线的方程就可以是比较简单的标准方程.

椭圆的一般方程形如：$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$.

我们知道椭圆具有很好的几何性质，比如椭圆有两个相互垂直的对称轴（即长轴和短轴）和一个对称中心，平行弦的中点在过对称中心的一条直线上等等.



先将坐标系绕坐标原点旋转到与椭圆的两个对称轴平行的方向，在通过坐标系的平移（将坐标原点平移到椭圆的对称中心），使得新坐标系的坐标轴与椭圆的对称轴重合，新的坐标原点与椭圆的对称中心重合.

在新坐标系下，由于椭圆上的点关于 x 轴、 y 轴以及坐标原点对称，交叉项 xy 的系数、一次项 x 和 y 的系数全为零，此时椭圆的方程就变为我们熟悉的标准方程的形式.

坐标旋转的目的是消去交叉项，而平移则可以通过配方消去一次项.

给定一个二元二次方程，如何判断它到底代表哪类二次曲线呢？我们可以通过坐标变换（旋转和平移）将其化为标准方程来加以判断.

给定一个三元二次方程，我们如何判断它到底表示哪类二次曲面呢？同样，我们可以通过坐标变换将其化为标准方程来加以判断.

由于一次项可以通过配方（几何上就是平移）消掉，在n维向量空间中，我们主要研究一类二次齐次多项式，这就是所谓的**二次型**理论.

n元二次型就是n元二次齐次多项式，它可以看成是二次曲线（二元二次）和二次曲面（三元二次）的推广.

二次曲线涉及度量性质（长度、夹角等），推广到二次型时，需引入内积的概念，由此给出相应的度量概念（向量长度，正交等），这在第五章有所体现.

在二次型理论中，我们主要研究如何通过线性变换将二次型化为标准（不含交叉项而只含平方项的）二次型. 作为坐标变换的推广，**线性变换**也是线性代数的主要研究内容.

通过上面的介绍，我们看到线性代数的主要研究内容线性方程组（第三章）、向量的线性相关性（第四章）、二次型（第五章）、线性空间与线性变换（第六章）都是平面解析几何和空间解析几何研究内容的推广，所以说线性代数就是高维的解析几何.

在研究以上内容时，我们有两个主要工具：一个是矩阵（第二章），另一个是行列式（第一章）.

矩阵是我们这个课程的一条主线，是我们研究几乎所有内容的都离不开得一个重要工具.

在第三章我们将看到，解方程组实际上可以通过对由未知量的系数以及常数项构成的增广矩阵进行所谓的初等变换而得到.

在向量空间中一旦建立坐标系，线性变换就可以通过矩阵来表示，如何用一个简单的矩阵表示一个线性变换，或者说如何取适当的坐标系使得线性变换的矩阵具有较为简单的形式，是通过研究矩阵相似实现的(第五章的重要内容)，所以矩阵是我们研究线性变换的重要工具.

二次型与对称矩阵间有一个一一对应关系，矩阵也是我们研究二次型必不可少的工具.

行列式（第一章）是研究矩阵的一个有力工具，在研究其它内容时亦有重要的理论价值.

线性代数的作用与地位

本课程是理工科高等学校大面积公共基础必修课，是考试课. 本课程为后继课程提供理论基础，比如数学类的《数学建模》、《数值代数》、《矩阵论》、《微分方程》等等；也是其他专业（尤其是理工科，比如理论物理、力学等等）专业课的基础.

随着计算机的飞速发展，大量的实际问题，可以用离散化的手段在计算机上通过数值计算而得以解决. 本课程就是《数值计算》（或者称为《数值代数》）的理论基础.

在硕士研究生入学全国统考中,《高等数学》是很多专业的考试科目。此处的高等数学是广义的，它包括微积分、线性代数、概率统计等内容，不同类别的《高等数学》考试科目所含内容及其比例稍有不同.

线性代数和概率统计的内容在《高等数学》考试科目中所占分值比例大概是各占 20% 左右.

线性代数课程的计划是每周3学时、一学期;

微积分是每周6学时、2学期；按比例来算，微积分应该占到80%左右，实际上却只有60%左右。

从这个角度，学好线性代数是很经济、划算的，花比较少的时间，可以得到比较好的分数.

上面是本课程一个整体的、大致的情况.